Baccalauréat Métropole 7 juin 2021

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(2x^2-2x+1\right)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

   a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^2}$

   c. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1+2x)}{x^2}$.

2. La fonction f :

   a. est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ **b.** est monotone sur $]0\,;\,+\infty[$

   c. admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$ **d.** admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

   a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 **d.** e^{2x}.

4. La fonction f :

   a. est concave sur $]0\,;\,+\infty[$ **b.** est convexe $]0\,;\,+\infty[$

   c. est concave sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ **d.** est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement E.
On considère les évènements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,98$;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.

b. Démontrer que : $p(T) = 0,077\,5$.

3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,95$.

Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(D) = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.

On donnera un résultat arrondi au centième.

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.
Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3$ °C.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.
Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.
Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$

2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.

En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

- **a.** Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
- **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
- **c.** En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

7.
- **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.

  Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
- **b.** Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T= ........................
    while T ..................
         T= ................
         n=n+1
    return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

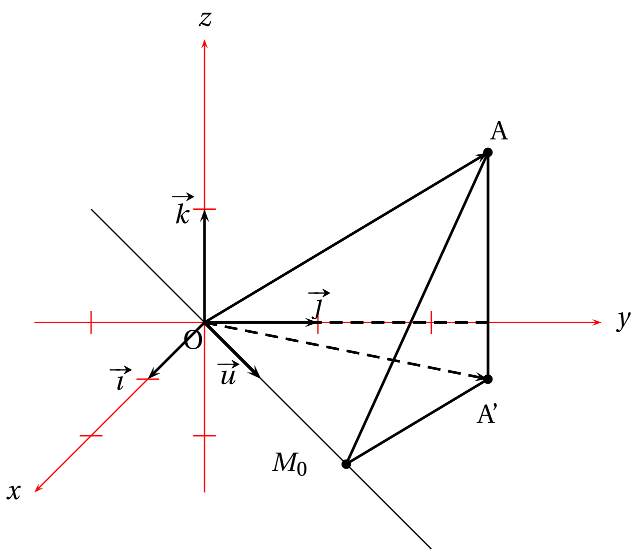
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : Exercice A ou Exercice B
Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

EXERCICE A .

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t~;~t~;~0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2~;~2~;~0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.

On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1~;~3~;~0)$.

Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

EXERCICE B

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.