

♣ Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021 J2 ♣

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

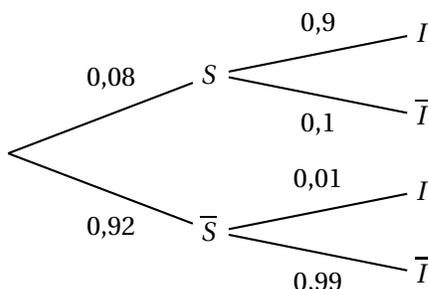
**Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.**

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

1.



2. a. On a  $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$   
 b. On a de même  $P(\bar{S} \cap I) = P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,0092$ .  
 D'après la loi des probabilités totales :  
 $P(I) = P(S \cap I) + P(\bar{S} \cap I) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$ .  
 c. Il faut calculer  $P_I(S) = \frac{P(I \cap S)}{P(I)} = \frac{0,072}{0,0812} \approx 0,887$  soit 0,89 au centième près.
3. a. Les tirages étant indépendants les uns des autres et étant assez nombreux on peut considérer que la variable  $Z$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 50$  et  $p = 0,08$ .  
 b. On a  $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,015466$ ;  
 $P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067426$ , donc  
 $P(Z \geq 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,015466 + 0,067426) \approx 0,917$ , soit 0,92 au centième près.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

1. Pour  $t = -2$ , on trouve les coordonnées de B.  
 2. Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  admet pour coordonnées :  $(2 - 1 ; 1 - 0 ; 0 - 2)$  soit  $(1 ; 1 ; -2)$   
 3.  $M(x ; y ; z) \in (AB)$  s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$  soit :

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \times t \\ y - 0 = 1 \times t \\ z - 2 = -2 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. La droite  $\Delta$  a pour vecteur directeur  $\delta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit  $\mathcal{P}$  le plan dont on cherche une équation.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \delta = 0 \iff 2(x-0) + 1(y-1) - 1(z-2) = 0 \iff$$

$$2x + y - 1 - z + 2 = 0 \iff 2x + y - z + 1 = 0.$$

5. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} : \text{le vecteur } \overrightarrow{AD} \text{ est une}$$

combinaison linéaire des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

### EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

#### Partie I

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. • On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-2x} = -\infty$ ; donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. la fonction  $f$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - (-2)e^{-2x} = 1 + 2e^{-2x}.$$

On sait que quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-2x} > 0$ , donc  $1 + 2e^{-2x} > 1 > 0$ . La dérivée est positive donc la fonction  $f$  est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

3. La fonction  $f$  est continue car dérivable et strictement croissante; comme  $0 \in \mathbb{R}$ , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que  $f(\alpha) = 0$ .

La calculatrice donne :

$$f(0) = -1 \text{ et } f(1) \approx 0,865, \text{ donc } 0 < \alpha < 1;$$

$$f(0,4) \approx -0,05 \text{ et } f(0,5) \approx 0,13, \text{ donc } 0,4 < \alpha < 0,5;$$

$$f(0,42) \approx -0,01 \text{ et } f(0,43) \approx 0,007, \text{ donc } 0,42 < \alpha < 0,43.$$

4. On a donc :

- sur  $] -\infty; \alpha[$ ,  $f(x) < 0$ ;
- sur  $] \alpha; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$ ;
- et  $f(\alpha) = 0$ .

#### Partie II

1.

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

- a. Soit  $u(t) = t^2 + e^{-2t}$ , donc  $h(t) = \sqrt{u(t)}$  fonction dérivable car composée de deux fonctions « racine » et  $h$  dérivables.

$$\text{Donc } h'(t) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

- b. Le dénominateur étant positif, le signe de  $h'(t)$  est celui du numérateur soit  $f(t)$  dont on a vu le signe dans la partie I.

Donc :

- sur  $] -\infty ; \alpha[$ ,  $f(t) < 0$  donc  $h'(t) < 0$  : la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle;
- sur  $] \alpha ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$  donc  $h'(t) > 0$  : la fonction est strictement croissante sur cet intervalle;
- et  $f(\alpha) = 0$ , donc  $h(\alpha)$  est le minimum de la fonction  $h$ .

La distance  $OM$  est donc minimale pour  $t = \alpha$  et l'ordonnée de  $M$  est alors  $e^{-\alpha}$ .

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point  $A(\alpha ; e^{-\alpha})$ .

$\alpha$  est l'abscisse du point d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe  $\mathcal{C}$  au point A

2. a. Le coefficient directeur de la tangente  $T$  au point d'abscisse  $\alpha$  est  $g'(\alpha) = -e^{-\alpha}$
- b. D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est  $-e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$ .

or on sait que  $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = e^{-2\alpha} \iff \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$ , donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à  $-1$ . La droite (OA) et la tangente  $T$  sont perpendiculaires.

Voir à la fin.

### EXERCICE au choix du candidat

5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

#### Exercice A

Principaux domaines abordés :  
Suites numériques; raisonnement par récurrence.

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 ;$$

et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. •  $u_1 = \frac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \frac{58}{5}$ ;  
 •  $v_1 = \frac{16 + 5}{2} = \frac{21}{2}$ .

2. On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $w_n = u_n - v_n$ .

a. On a quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \frac{u_n - v_n}{10} = \frac{w_n}{10}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'égalité  $w_{n+1} = \frac{1}{10} w_n$  montre que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{10} = 0,1$  et de premier terme  $w_0 = u_0 - v_0 = 16 - 5 = 11$ .

On sait qu'alors pour tout naturel  $n$ ,  $w_n = 11 \times (0,1)^n$ .

b. Comme  $0,1 > 0 \Rightarrow 0,1^n > 0$  et  $11 > 0$ , donc la suite  $(w_n)$  est une suite de nombres supérieurs à zéro.

D'autre part  $0 < 0,1 < 1$  entraîne que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^n = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

3. a. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{5u_n}{5} = \frac{-2u_n + 2v_n}{5} = -\frac{2}{5}(u_n - v_n) = -\frac{2}{5}w_n = -\frac{4}{10}w_n = -0,4w_n$

b. On a vu à la question 2. b. que  $w_n > 0$ , quel que soit le naturel  $n$ , donc  $-0,4w_n < 0$  et par conséquent :

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$ , ce qui montre que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite  $(v_n)$  est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \geq v_0 = 5$ .

c. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq 5$ .

*Initialisation* : On a  $u_0 = 16 \geq 5$  : la proposition est vraie au rang  $n = 0$ .

*Hérédité* : on suppose que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \geq 5$ .

On a donc  $3u_n \geq 15$  (1) et comme on a admis que  $v_n \geq 5$ , on a  $2v_n \geq 10$  (2).

On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :

$3u_n + 2v_n \geq 25$  d'où en multipliant par le nombre positif  $\frac{1}{5}$  :

$\frac{3u_n + 2v_n}{5} \geq 5$  et finalement  $u_{n+1} \geq 5$ .

*Conclusion* : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang  $n$ , elle l'est aussi au rang  $n+1$  ; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 5$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite  $\ell \geq 5$ .

On peut démontrer de la même manière que la suite  $(v_n)$  est convergente. On admet ce résultat, et on appelle  $\ell'$  la limite de  $(v_n)$ .

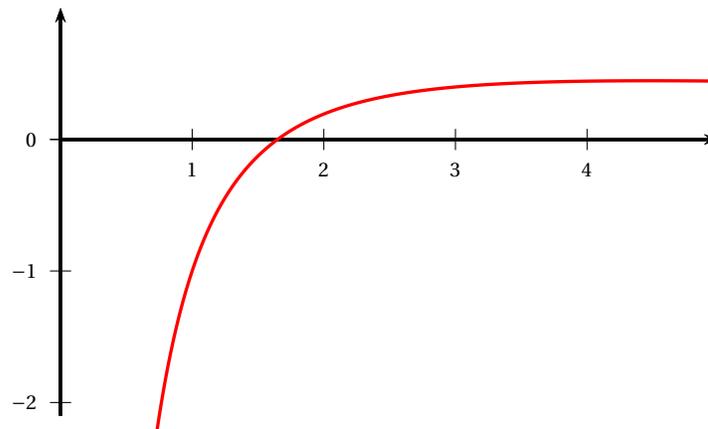
4. a. On a vu à la question 2.b. que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$  ou encore que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .  
Les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  étant convergentes, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et donc que  $\ell = \ell'$ .
- b. On considère la suite  $(c_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $c_n = 5u_n + 4v_n$ .  
Donc :  $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2(u_n + v_n) = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n = 5u_n + 4v_n = c_n$ .  
Donc la suite  $(c_n)$  est constante.  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100$ .
- c. Puisque  $c_n = 5u_n + 4v_n$  et que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont même limite  $\ell$ , on a donc :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 = 100 = 5\ell + 4\ell = 9\ell$ .  
 $9\ell = 100$  donc  $\ell = \frac{100}{9}$ .

### Exercice B

Principaux domaines abordés :  
Fonction logarithme, limites, dérivation.

#### Partie 1

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Dans  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = 0 \iff \frac{2\ln(x) - 1}{x} = 0$ , on a donc  
 $2\ln(x) - 1 = 0 \iff 2\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}}$ .  
 $S = \left\{ e^{\frac{1}{2}} \right\}$ .  
*Rem.*  $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1,649 \approx 1,65$  au centième près.

2. • Sur  $]0; e^{\frac{1}{2}}[$ , on a  $f(x) < 0$ ;  
 • Sur  $]e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ , on a  $f(x) > 0$ ;  
 •  $f(e^{\frac{1}{2}}) = 0$ .

**Partie II**

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. a. On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$ , donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

- b.  $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty, \text{ on obtient par produit :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. La fonction  $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$  est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{1}{x} \times [\ln(x) - 1] + \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} [\ln(x) - 1 + \ln(x)] = \frac{1}{x} \times (2\ln(x) - 1) = \frac{2\ln(x) - 1}{x} = f(x).$$

3. Le signe de  $f(x) = g'(x)$  a été trouvé à la question 2 de la partie I; on a donc :

- Sur  $]0; e^{\frac{1}{2}}[$ , on a  $g'(x) < 0$  : la fonction  $g$  est strictement décroissante sur cet intervalle
- Sur  $]e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ , on a  $g'(x) > 0$  : la fonction  $g$  est strictement croissante sur cet intervalle
- $g'(e^{\frac{1}{2}}) = 0$  :  $g(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$  est le minimum de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	
$g$	$+\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$

4. Comme  $-\frac{1}{4} = -0,25$ , le tableau de variations montre que l'équation  $g(x) = m$ , avec  $m > -0,25$  a deux solutions, l'une sur l'intervalle  $]0; e^{\frac{1}{2}}[$ , l'autre sur  $]e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ .

5. Dans  $]0; +\infty[$ ,  $g(x) = 0 \iff \ln(x)[\ln(x) - 1] = 0 \iff \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \ln(x) - 1 = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \ln(x) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases}$$

$$S = \{1; e\}.$$

## Annexe à compléter et à rendre avec la copie

## Exercice 3

