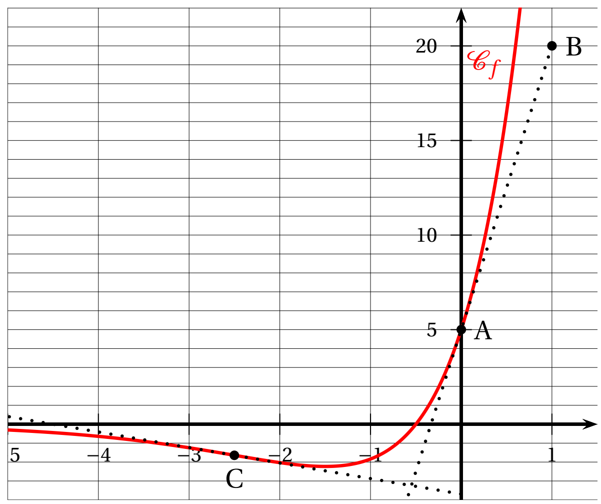
∾ Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats **4 points**



1. On peut affirmer que :

   a. $f'(-0{,}5) = 0$

   Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-0{,}5$ est manifestement positif — Faux

   b. si $x \in]-\infty\,;\,-0{,}5[$, alors $f'(x) < 0$

   Le nombre dérivé s'annule en à peu près en $x = -1{,}5$ — Faux

   c. $f'(0) = 15$

   Graphiquement $f'(0) = \dfrac{20-5}{1-0} = 15$ — Vrai

   d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$

   f' est négative sur $]-\infty\,;\,-1{,}5[$ et positive sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$ — Faux

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0{,}5\,;\,0)$.

   On peut affirmer que :

   a. $a = 10$ et $b = 5$

   b. $a = 2{,}5$ et $b = -0{,}5$

   c. $a = -1{,}5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

Graphiquement $f(0) = 5 \iff b\mathrm{e}^0 = 5 \iff b = 5$;

D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(ax+a+b)$.

On a vu que $f'(0) = 15 \iff a+b = 15 \iff a+5 = 15 \iff a = 10$: la **réponse a.** est vraie.

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$

d. $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

$f''(x) = 0 \iff (10x+25)\mathrm{e}^x = 0 \iff 10x+25 = 0$ (car $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$) ; donc $f''(x) = 0 \iff x = -2{,}5$: C est donc l'unique point d'inflexion. **Réponse c.**

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

Non car par exemple si $U_n = -n$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ ces deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) diverge ;

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

Non avec $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ on a $V_n \geqslant 2$;

c. la suite (U_n) diverge

Non avec par exemple $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, les deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) converge ;

d. la suite (U_n) est majorée

On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée ; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leqslant M$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leqslant V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leqslant M$ et donc que la suite (U_n) est majorée. **Réponse d.**

Exercice 2 commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4}{5}$.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

Initialisation : on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{4}{5}$; de plus $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{4}{5} \leqslant 2$, donc :
$\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : on suppose que pour $n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.
Or on a vu que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$ et on a $f(2) = \dfrac{8}{1+6} = \dfrac{8}{7}$;
de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\dfrac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{8}{7}$.
Or $\dfrac{1}{2} < \dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{8}{7} < 2$; on a donc finalement :
$\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a :
$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

c. La fonction f est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4)$$

$$\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell-1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 1 \end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. **a.** On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$:

```
def seuil(E) :
  u = 0,5
  n = 0
  while 1 - u >= E
    u = 4 * u/(1 + 3 * u)
    n = n + 1
  return n
```

b. On obtient $u_7 \approx 0{,}999\,939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1 + 3u_n$:

$v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1 + 3u_n - 4u_n} = \dfrac{4u_n}{1 - u_n} = 4\dfrac{u_n}{1 - u_n} = 4v_n.$

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n + 1).$

Comme $v_n = 4^n, v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n + 1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$u_n = \dfrac{4^n}{4^n + 1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$:

$u_n = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0{,}25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1 + 0{,}25^n}$.

Comme $0 < 0{,}25 < 1$, on peut dire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0{,}25^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$.

Exercice 3 commun à tous les candidats **6 points**

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Soit f la fonction définie pour $t \in [0~;~120]$ par :

$$f(t) = \left(0{,}04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40.$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Pour $t = 0$, $f(0) = 400\,\mathrm{e}^0 + 40 = 440$ (crapauds)

2. Sur l'intervalle $[0;120]$ en dérivant le produit :

$$f'(t) = (0{,}08t-8)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + \frac{1}{50}\left(0{,}04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} = \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left[(0{,}08t - 8) + \frac{1}{50}\left(0{,}04t^2 - 8t + 400\right)\right]$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left(0{,}08t - 8 + 0{,}0008t^2 - 0{,}16t + 8\right) = \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left(-0{,}08t + 0{,}0008t^2\right)$$
$$= 0{,}0008\left(t^2 - 100t\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} = t(t-100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. On sait que quel que soit $t \in [0~;~120]$, $\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} > 0$: le signe de $f'(t)$ est donc celui du trinôme $t(t-100)$ qui est positif sauf sur l'intervalle $]0~;~100[$ (entre les racines du trinôme).

$f(0) = 480$, $f(100) = (400 - 800 + 400)\mathrm{e}^{\frac{100}{50}} + 40 = 0 + 40 = 40$ et
$f(120) = 576 - 960 + 400)\mathrm{e}^{\frac{120}{50}} + 40 = 16\mathrm{e}^{2,4} + 40 \approx 216{,}37$.

On dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0~;~120]$:

t	0		100		120
$t(t-100)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
f	440	$\searrow$	40	$\nearrow$	216,37

4. Selon cette modélisation :

a. On a vu dans la question précédente que $f(100) = 40$ est le minimum de la fonction f, on a donc $J = 100$.

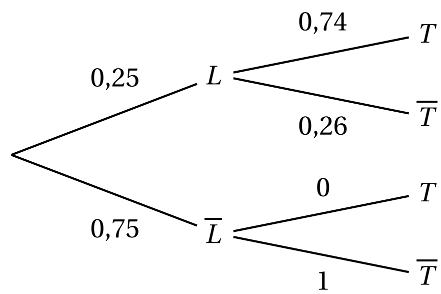
b. On a aussi vu que de 100 jours à 120 jours le nombre de crapauds croît strictement de 40 à environ 216 : il dépassera donc 140 individus.

c. Soit J_{140} la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus. La calculatrice donne :

$f(115) \approx 130 < 140$ et $f(116) \approx 144 > 140$, donc $J_{140} = 116$.

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

1. On complète l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(L \cap T) + P\left(\overline{L} \cap T\right) = P(L) \times P_L(T) + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(T) = 0{,}25 \times 0{,}74 + 0{,}75 \times 0 = 0{,}185$
3. Le têtard n'est pas contaminé. La probabilité que le lac soit infecté est :
$P_{\overline{T}}(L) = \dfrac{P\left(L \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}26}{1 - 0{,}185} = \dfrac{0{,}065}{0{,}815} \approx 0{,}0797$, soit 0,080 au millième près.

Exercice au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Exercice A

Principaux domaines abordés : Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

1. Dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$: $\text{I}\left(0 ; \dfrac{1}{4} ; 1\right)$, $\text{J}\left(\dfrac{1}{4} ; 0 ; 1\right)$, $\text{K}\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{4}\right)$.
2. On a $\overrightarrow{\text{AG}}\,(1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{\text{IJ}}\left(\dfrac{1}{4} ; -\dfrac{1}{4} ; 0\right)$, $\overrightarrow{\text{IK}}\left(1 ; -\dfrac{1}{4} ; -\dfrac{3}{4}\right)$.
Or $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{IK}} = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = 0$.
Less vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.
3. D'après la question précédente on sait que : $M(x ; y ; z) \in \text{(IJK)} \iff 1x + 1y + 1z + d = 0$.
Or par exemple $\text{I}\left(0 ; \dfrac{1}{4} ; 1\right) \in \text{(IJK)} \iff 0 + \dfrac{1}{4} + 1 \times 1 + d = 0 \iff 1 + 4 + 4d = 0 \iff 4d = -5 \iff d = -\dfrac{5}{4}$.
Finalement : $M(x ; y ; z) \in \text{(IJK)} \iff x + y + z - \dfrac{5}{4} = 0 \iff 4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
Le plan (IJK) a pour équation cartésienne $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\,(0\,;\,1\,;\,0)$. Donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{BC}) \iff \overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{\text{BC}} \text{ (avec } t \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 0\\ y-0 &=& t\times 1, \quad t\in\mathbb{R}\\ z-0 &=& t\times 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& t, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &=& 0\end{array}\right.$$

La droite (BC) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& t, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &=& 0\end{array}\right.$

5. Les coordonnées de $\text{L}(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation de (BC) et l'équation du plan (IJK)

donc le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& t\\ z &=& 0\\ 4x+4y+4z-5 &=& 0\end{array}\right.$

ce qui donne en remplaçant $x,\ y$ et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation :

$4\times 1+4t+4\times 0-5=0 \iff 4t+4-5=0 \iff 4t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{4}$.

Les coordonnées de L sont donc $\left(1\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,0\right)$.

6. Voir l'annexe.

L'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF) est le segment [KL].

L'intersection du plan (IJK) et du cube a été dessinée en tirets rouge.

7. Soit $\text{M}\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

Comme $\text{L} \in (\text{IJK})$, il suffit de vérifier que M est aussi un point de ce plan, soit d'après le résultat de la question 4. :

$4x_{\text{M}}+4y_{\text{M}}+4z_{\text{M}}-5 = 4\times\frac{1}{4}+4\times 1+4\times 0-5 = 4+1-5=0$ donc $\text{M}\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right) \in (\text{IJK})$.

Conclusion : les points I, J, K, L et M sont coplanaires.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = 1+\dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Par produit on déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et donc que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$

3. La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle : $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

4. Comme $x^2 > 0$ pour $x \in]0~;~+\infty[$ le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$:
  la fonction h est donc strictement croissante sur $]0~;~\mathrm{e}[$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$:
  la fonction h est donc strictement décroissante sur $]\mathrm{e}~;~+\infty[$;
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$:
  la fonction h a un maximum $f(\mathrm{e}) = 1 + \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

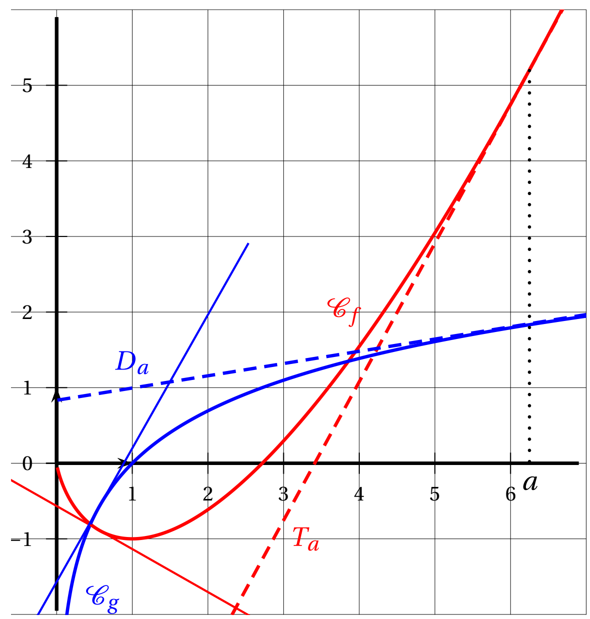
D'où le tableau de variations de h :

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
h	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

5. Comme $1 + \frac{1}{\mathrm{e}} > 1 > 0$, le tableau de variations montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0~;~\mathrm{e}[$.
On a $f(1) = 1 + \dfrac{0}{1} = 1$, donc $0 < \alpha < 1$;
La calculatrice donne : $f(0{,}5) \approx -0{,}4$ et $f(0{,}6) \approx 0{,}15$, donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

Partie II

Soit les fonctions f et g définies sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$.



1. La fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$
Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $f'(a) = \ln(a)$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $g'(a) = \dfrac{1}{a}$.

3. Le produit des coefficients directeurs est égal à -1, soit :
$\ln(a) \times \dfrac{1}{a} = -1 \iff \dfrac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \dfrac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$
et on a vu à la fin de la partie I que cette équation n'avait qu'une solution $a = \alpha$: il existe une seule valeur de a telle que les droites T_a et D_a sont perpendiculaires : $a = \alpha$.
Voir la figure.

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE

À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER L'EXERCICE A