☙ Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021 ❧
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

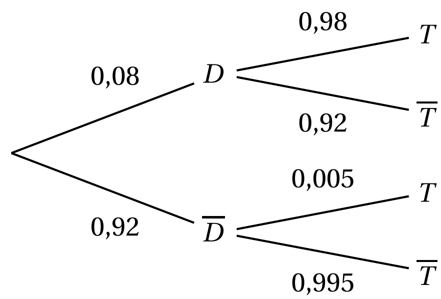
Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right)$: or
$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0{,}078\,4$ et
$P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0{,}004\,60$. Donc :
$P(T) = 0{,}078\,4 + 0{,}004\,6 = 0,083$.

3. **a.** La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}078\,4}{0,083} \approx 0{,}944\,5$, soit 0,945 au millième près.

b. D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. **a.** Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est $0,103$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

b. On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :

$0,103^0 \times (1-0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millième près.

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

$1-0,581$, soit 0,419 au millième près.

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X=0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.

Il faut donc trouver n tel que :

$1-0,897^n \geqslant 0,75 \iff 1-0,75 \geqslant 0,897^n \iff 0,25 \geqslant 0,897^n$.

La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n=13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.

Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

EXERCICE 2 — 5 points

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1-0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1-0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1-0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$ soit environ 410 individus.

• 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1-0,15u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1-0,15 \times 0,4095) = 0,307125 \times (1-0,061425) = 0,307125 \times 0,938575) \approx 0,2282$ soit environ 228 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,1]$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 0,75(1-0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x = 0,75 - 0,225x$.

Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,225x \leqslant 0,225 \Rightarrow -0,225 \leqslant -0,225x \leqslant 0 \Rightarrow$

$0,75-0,225 \leqslant 0,75-0,225x \leqslant 0,75$ ou enfin $0,525 \leqslant f'(x) \leqslant 0,75$.

Sur $[0\,;\,1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Sur $[0\,;\,1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0 \iff$ $x[0,75(1-0,15x)-1] = 0 \iff x(0,75-0,1125x-1) = 0 \iff x(-0,25-0,1125x) = 0 \iff$ $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\,\text{ou}\\ -0,25-0,1125x & = 0 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\,\text{ou}\\ -0,25 & = & 0,1125x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\,\text{ou}\\ -\frac{0,25}{0,1125} & = & x\end{array}\right..$
Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0\,;\,1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** *Initialisation* : on a vu que $0 \leqslant 0,4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, on a donc : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1-0,15) = 0,6375 \leqslant 1$:

$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente.

c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geqslant 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 0$.

5. **a.** L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

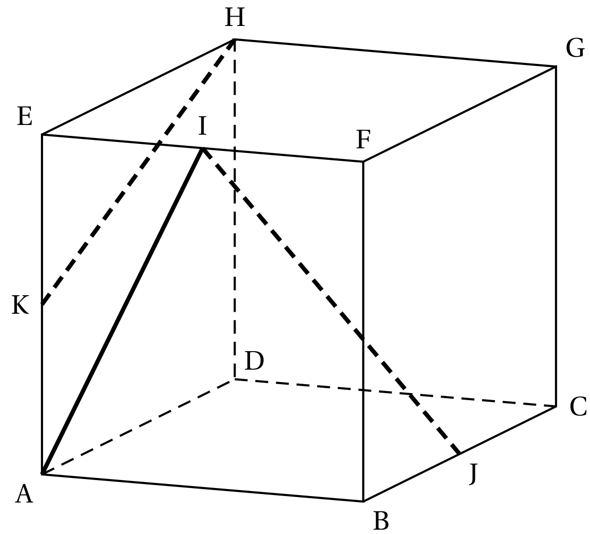
b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02

Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$

L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



En prenant le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ on a :

$$\text{A}(0\,;\,0\,;\,0),\ \text{B}(0\,;\,0\,;\,0),\ \text{C}(1\,;\,1\,;\,0),\ \text{D}(0\,;\,1\,;\,0),\ \text{E}(0\,;\,0\,;\,1)$$

$$\text{F}(1\,;\,0\,;\,1),\ \text{G}(1\,;\,1\,;\,1),\ \text{H}(0\,;\,1\,;\,1),\ \text{I}(0,5\,;\,0\,;\,1),\ \text{J}(1\,;\,0,5\,;\,0),\ \text{K}(0\,;\,0\,;\,0,5)$$

1. On a $\overrightarrow{\text{AI}}\,(0,5\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\text{KH}}\,(0\,;\,1\,;\,0,5)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. **a.** Voir plus haut.

   b. On a $\overrightarrow{\text{IJ}}\,(0,5\,;\,0,5\,;\,-1)$, $\overrightarrow{\text{AE}}\,(0\,;\,0\,;\,1)$ $\overrightarrow{\text{AC}}\,(1\,;\,1\,;\,0)$.
   On a $2\overrightarrow{\text{IJ}}+2\overrightarrow{\text{AE}}=\overrightarrow{\text{AC}}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ est donc une combinaison des vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.
3. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\,(1\,;\,1\,;\,2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles
4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{p}\,(1\,;\,3\,;\,-2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\,(1\,;\,1\,;\,2)$.
   Or $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u_2}=1+3-4=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. **Méthode 1**

   Soit Δ la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 5+1t\\ y & = & 3+3t\\ z & = & 1-2t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

Le projeté L, de M sur le plan $\mathscr{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 5+1t\\ y & = & 3+3t\\ z & = & 1-2t\\ x+3y-2z+2 & = & 0\end{array}\right., t \in \mathbb{R}. \Rightarrow 5+t+3(3+3t)-2(1-2t)+2=0 \iff$$

$5+t+9+9t-2+4t+2=0 \iff 14t+14=0 \iff t+1=0 \iff t=-1.$

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$:

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 5-1\\ y & = & 3+3\times(-1)\\ z & = & 1-2\times(-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}x & = & 4\\ y & = & 0\\ z & = & 3\end{array}\right.$$

Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$ est le le point L$(4\,;0\,;3)$.

Méthode 2

On a $\overrightarrow{\text{ML}}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, donc $\overrightarrow{\text{ML}} = -\overrightarrow{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

D'autre part L$(4\,;0\,;3) \in \mathscr{P} \iff 4+3\times0-2\times3+2=6-6=0$ est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A **5 points**

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2(a+b)} = \mathrm{e}^{2a+2b} = \mathrm{e}^{2a}\times\mathrm{e}^{2b}$. Donc l'affirmation est fausse.

Affirmation 2 : Une équation de la tangente t au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2+(3-x)\mathrm{e}^x$ est :

$M(x\ ;\ y) \in t \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Or $f(0) = -2+3\mathrm{e}^0 = -2+3 = 1$ et

$f'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x$, d'où $f'(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$.

Donc $M(x\ ;\ y) \in t \iff y-1 = 2(x-0) \iff y = 2x+1$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 3 : On a quel que soit le réel x : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right)$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x\mathrm{e}^x} = 0$.

Par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 + \frac{3}{x\mathrm{e}^x} = +\infty$ et par produit de limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(e^x - 1 + \dfrac{3}{xe^x}\right) = +\infty$. L'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + e^{-x}$

f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -1 - e^{-x} = -(1 + e^{-x}) < 0$ car quel que soit le réel x, $e^{-x} > 0$, donc $1 + e^{-x} > 1$ puis $-(1 + e^{-x}) < -1 < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

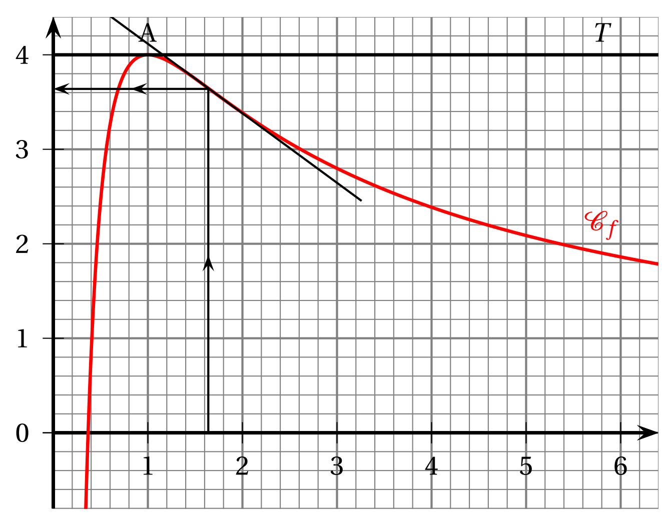
De même $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Comme $f(0) = 1+1 = 2 > 0$ et $f(2) = 1-2+e^{-2} \approx -0,86 < 0$, on a bien $0 < x_0 < 2$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 5 : On a $g'(x) = 2x - 5 + e^x$ et $g''(x) = 2 + e^x > 0$ comme somme de deux termes supérieurs à zéro. la fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.

EXERCICE B **5 points**



1. Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.
3. En utilisant les lectures du **1.** :
$f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;
$f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4+4\ln x}{x}.$$

4. • On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

On sait que sur $]0~;~1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0~;~1[$;

Par contre sur $]1~;~+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1~;~4)$ est le maximum de la fonction sur $]0~;~+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0~;~1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1~;~+\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

6. f'étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f''(x) = \dfrac{-4\times\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(-4\ln x)}{x^4} = \dfrac{-4x+8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4+8\ln x}{x^3}$.

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4+8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4+8\ln x = 0 \iff -1+2\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,649$ $\left(\text{ou } \sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3,639$.

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.