

CORRIGÉ BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 Sujet 0

EXERCICE 1

commun à tous les candidats

5 points

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n , vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

On peut affirmer que :

- a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. b. La suite (w_n) converge vers 1.
 c. La suite (u_n) est minorée par 1. d. La suite (w_n) est croissante.

|| Application directe du théorème dit « des gendarmes ».

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur \mathbb{R} par :

- a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$ b. $f'(x) = (1 + 2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$ d. $f'(x) = (2 + x^2)e^{x^2}$.

|| $f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2}$

3. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

- a. -1 b. 0 c. $\frac{1}{2}$ d. $+\infty$.

|| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \quad h(0) = 2 \quad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

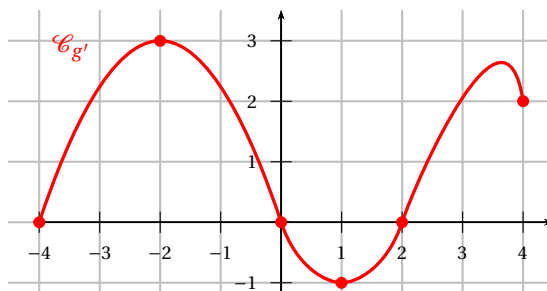
- a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.
 b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $h(a) = 1$.
 d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

|| Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g' .

On peut affirmer que :

- a. g admet un maximum en -2 .
 b. g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
 d. g admet un minimum en 0.



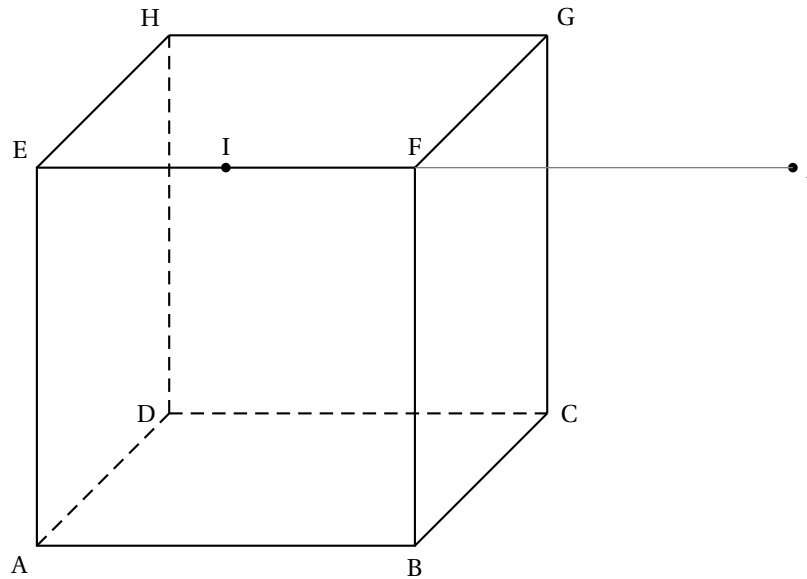
|| La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

EXERCICE 2

commun à tous les candidats

5 points

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. a. • Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\vec{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{BI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - c. • Les vecteurs \vec{BI} et \vec{BG} ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
 - $\vec{DJ} \cdot \vec{BI} = -1 + 0 + 1 = 0$ donc $\vec{DJ} \perp \vec{BI}$.
 - $\vec{DJ} \cdot \vec{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\vec{DJ} \perp \vec{BG}$.

Donc le vecteur \vec{DJ} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).
 - d. • Le vecteur $\vec{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.
 - Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2 - 0 + 0 + d = 0$, ce qui veut dire que $d = -2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
 - a. La droite d est orthogonale au plan (BGI), et \vec{DJ} est un vecteur normal au plan (BGI), donc \vec{DJ} est un vecteur directeur de la droite d .

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que \vec{FM} et \vec{DJ} soient colinéaires.

$$\overrightarrow{FM} \text{ et } \overrightarrow{DJ} \text{ colinéaires} \iff \overrightarrow{FM} = t \cdot \overrightarrow{DJ} \iff \begin{cases} x-1 = t \times 2 \\ y-0 = t \times (-1) \\ z-1 = t \times 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc la droite } d \text{ a pour équation } \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. On considère le point L de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6})$.

$$\bullet \text{ Pour prouver que } L \in d, \text{ on cherche } t \text{ pour que } \begin{cases} \frac{2}{3} = 1+2t \\ \frac{1}{6} = -t \\ \frac{5}{6} = 1+t \end{cases}$$

On trouve $t = -\frac{1}{6}$ donc $L \in d$.

• Le plan (BGI) a pour équation $2x - y + z - 2 = 0$; or $2x_L - y_L + z_L - 2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = 0$, donc $L \in (\text{BGI})$.

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. a. La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

$$\bullet \text{ IF} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ Le triangle rectangle FBG a pour aire } \frac{FG \times FB}{2} = \frac{1}{2}.$$

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

b. La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d , donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$$FL^2 = \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ donc } FL = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

On appelle \mathcal{A} l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times FL \times \mathcal{A} \iff \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \mathcal{A} \iff \frac{3 \times \sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

L'aire du triangle BGI est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 3

commun à tous les candidats

5 points

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée*;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

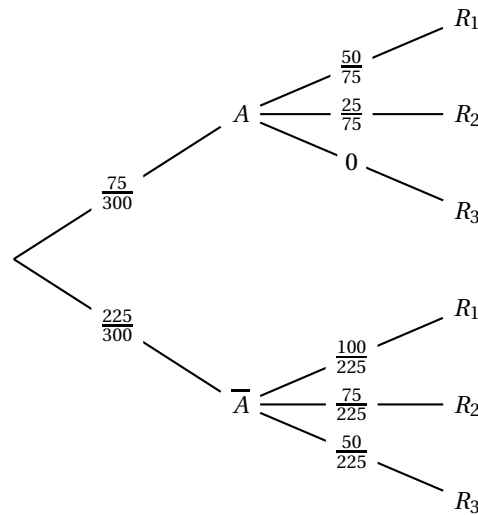
- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée*; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle*; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

- A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* »;
- R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation »;
- R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation »;
- R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



2. a. La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :

$$P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}.$$

- b. La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $P(R_2)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P(\bar{A} \cap R_2) = \frac{25}{300} + \frac{125}{300} \times \frac{75}{225} = \frac{25}{300} + \frac{75}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}.$$

- c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. La probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est :

$$P_{R_2}(A) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1 .

- a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

- $P(R_1) = P(A \cap R_1) + P(\bar{A} \cap R_1) = \frac{75}{300} \times \frac{50}{75} + \frac{225}{300} \times \frac{100}{225} = \frac{50}{300} + \frac{100}{300} = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$
- $P(R_2) = \frac{1}{3}$
- $P(R_3) = P(A \cap R_3) + P(\bar{A} \cap R_3) = 0 + \frac{225}{300} \times \frac{50}{225} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- b. L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X) = \sum(x_i \times p_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,67$.

Cela veut dire que le nombre de passages pour réussir l'examen est en moyenne de 1,67.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- a. On cherche un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P(\bar{R}_3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Le nombre $\frac{5}{6}$ est donc la probabilité de l'évènement « R_1 ou R_2 », c'est-à-dire la probabilité qu'une personne prise au hasard réussisse l'examen à la première tentative ou à la deuxième.

La probabilité que n personnes réussissent l'examen à la première ou à la deuxième tentative est de $(\frac{5}{6})^n$.

L'événement de probabilité $1 - (\frac{5}{6})^n$ est l'événement contraire du précédent, donc correspond à l'événement « au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative », c'est-à-dire « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1 - (5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

- b.** La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1 - (\frac{5}{6})^n > 0,9$.

On résout cette inéquation :

$$1 - (\frac{5}{6})^n > 0,9 \iff 0,1 > (\frac{5}{6})^n \iff \ln(0,1) > \ln\left((\frac{5}{6})^n\right) \iff \ln(0,1) > n \ln(\frac{5}{6}) \iff \frac{\ln(0,1)}{\ln(\frac{5}{6})} < n$$

$\frac{\ln(0,1)}{\ln(\frac{5}{6})} \approx 12,6$ donc la commande **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.

Il faut donc prendre $n = 13$ personnes sur les 300 pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à 0,9.

EXERCICE A

exercice au choix

5 points

Principaux domaines abordés

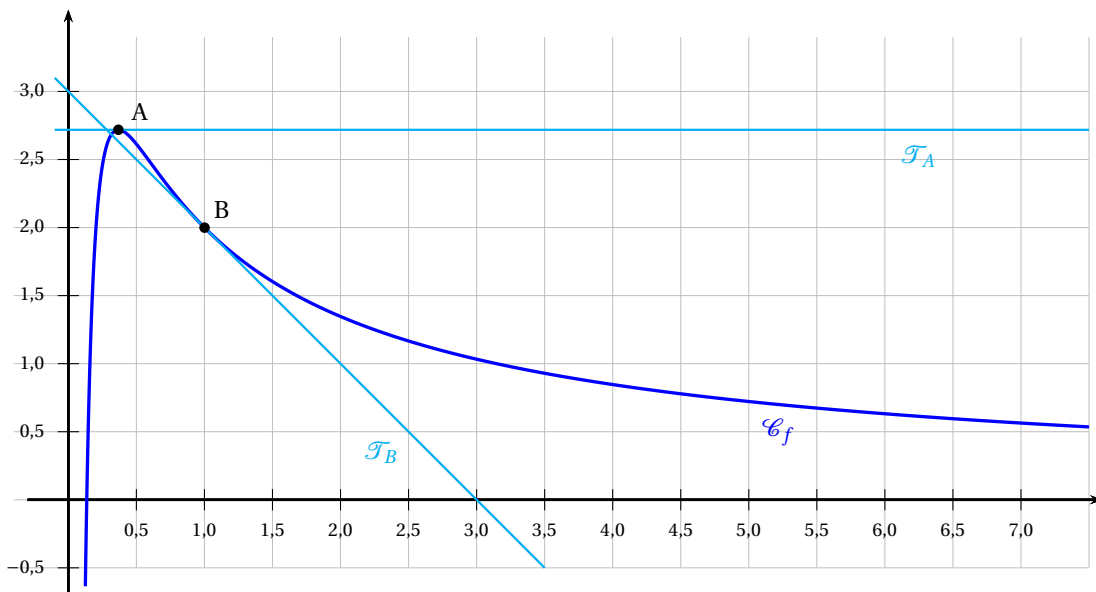
Logarithme

Dérivation, convexité, limites

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$;
- la tangente \mathcal{T}_A à la courbe \mathcal{C}_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$;
- la tangente \mathcal{T}_B à la courbe \mathcal{C}_f au point B de coordonnées $(1; 2)$.

La droite \mathcal{T}_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite \mathcal{T}_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f .

PARTIE I

- La droite \mathcal{T}_A est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.
La droite \mathcal{T}_A est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
On peut donc déduire que $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.
 - La droite \mathcal{T}_B est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B de coordonnées $(1; 2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
La droite \mathcal{T}_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\frac{3-0}{0-3} = -1$.
On a donc $f'(1) = -1$.
- La droite \mathcal{T}_B a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x + 3$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$.

1. • $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = e(2 - \ln(e)) = e(2 - 1) = e$ donc $A \in \mathcal{C}_f$.
- $f(1) = \frac{2 + \ln(1)}{1} = 2$ donc $B \in \mathcal{C}_f$.
- La courbe \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0; +\infty[$ cette équation.

$$f(x) = 0 \iff \frac{2 + \ln(x)}{x} = 0 \iff 2 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$$

Donc la courbe \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $(e^{-2}; 0)$.

2. Calculs des limites.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + \ln(x)) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + \ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3. Pour $x \in]0; \infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 2 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$.

4. $f'(x)$ est du signe de $-1 - \ln(x)$; $-1 - \ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < e^{-1}$

On dresse le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	e	0

5. On admet que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$.

La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.

Sur $]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3} \geq 0 \iff 1 + 2\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \iff x \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty \right[$.

EXERCICE B

exercice au choix

5 points

Principaux domaines abordés

Équations différentielles

Fonction exponentielle; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t , exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. a. $f(0)$ représente la température d'une baguette lors de sa sortie du four, c'est-à-dire 225 °C.
- b. Pour résoudre l'équation, on la met sous la forme $y' = ay + b$ avec a et b des réels. On obtient :

$$y' = -6y + 150 \iff y' = ay + b \text{ avec } \begin{cases} a = -6 \\ b = 150 \end{cases}$$

On sait alors que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = -\frac{b}{a} + Ce^{at}, C \in \mathbb{R}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{150}{-6} + Ce^{-6t} \\ f(t) &= 25 + Ce^{-6t} \end{aligned}$$

- c. La solution de l'équation différentielle a été obtenue en question b. Il reste à exploiter la condition initiale $f(t=0) = f(0) = 225$ d'après la valeur trouvée à la question a. La fonction qui satisfait donc le modèle de l'exercice est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(0) = 225 &\iff Ce^0 + 25 = 225 \\ &\iff C + 25 = 225 \\ &\iff C = 200 \end{aligned}$$

Donc on a bien, pour tout réel $t \geq 0$:

$$f(t) = 200e^{-6t} + 25$$

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four décroît et tend à se stabiliser à la température ambiante.
 - Vérifions d'abord que la fonction f décroît. f est d'abord bien dérivable pour tout réel $t \geq 0$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\text{pour tout réel } t \geq 0, f'(t) = -1200e^{-6t}$$

Or, pour tout réel $t \geq 0$:

$$\begin{cases} e^{-6t} > 0 \\ -1200 < 0 \end{cases} \implies f'(t) < 0 \implies f \text{ est bien décroissante (strictement).}$$

- Pour vérifier que la température tend à se stabiliser à la température ambiante (25 °C), nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-6t} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} 200e^{-6t} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} 200e^{-6t} + 25 = 25 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

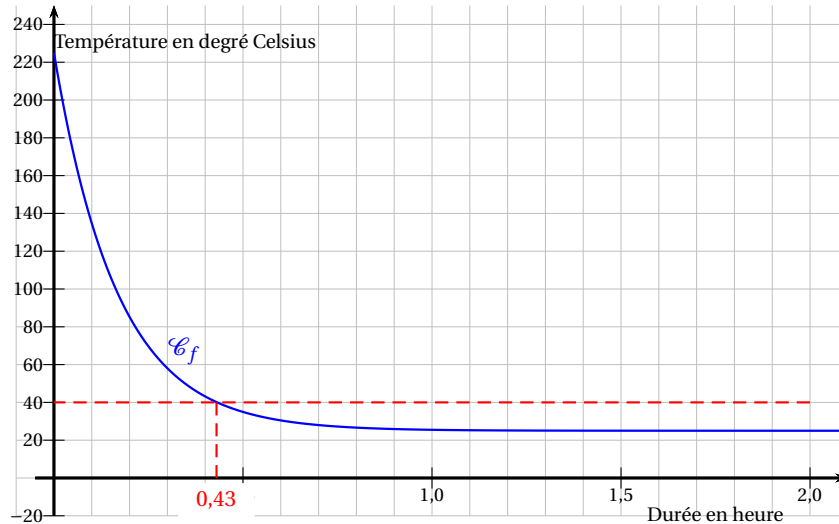
La fonction f , qui représente la température de la baguette (en °C) au bout du temps, a pour limite 25 en $+\infty$. Cela signifie donc bien que la température tend à se stabiliser à la température ambiante de 25 °C.

Donc la fonction f fournit un modèle en accord avec ces observations.

3. La fonction f est continue et décroissante strictement donc monotone sur $[0; +\infty[$. Par ailleurs, $f(0) = 225$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 25$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique élément $c \in [0; +\infty[$ tel que $f(c) = 40$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C . On note \mathcal{T}_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. La courbe \mathcal{C}_f semble atteindre 40 vers 0,43 heure soit $0,43 \times 60 = 25,8$ minutes. On trouve donc une valeur approchée de 26 minutes.
5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

Ainsi, pour un entier naturel n , D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n -ième et la $(n+1)$ -ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n : $D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right)$.

- a. On cherche une valeur approchée de D_0 .

$$\begin{aligned} D_0 &= f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= 200e^0 + 25 - \left(200e^{-\frac{6}{60}} + 25\right) \\ &= 200 - 200e^{-\frac{6}{60}} \\ &\approx 19,03 \end{aligned}$$

Donc 19 est bien une valeur approchée de \mathcal{D}_0 à 0,1 près. Cela signifie que la diminution de température qui se fait lors de la première minute après la sortie du four est d'environ 19°C . Au bout d'une minute, la baguette est donc à $225 - 19 = 206^\circ\text{C}$.

- b.

$$\begin{aligned} D_n &= f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right) \\ &= 200e^{-6 \times \frac{n}{60}} + 25 - \left(200e^{-6 \times \frac{n+1}{60}} + 25\right) \\ &= 200e^{-0,1n} - 200e^{-\frac{6n-6}{60}} \\ &= 200e^{-0,1n} - 200e^{-\frac{6n}{60} + \left(\frac{-6}{60}\right)} \\ &= 200e^{-0,1n} - 200e^{-0,1n} \times e^{-0,1} \\ \mathcal{D}_n &= 200e^{-0,1n} (1 - e^{-0,1}) \end{aligned}$$

Pour étudier le sens de variation de la suite (D_n) , on étudie le signe de $D_{n+1} - D_n$.
Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= 200e^{-0,1(n+1)}(1 - e^{-0,1}) - 200e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1}) \\ &= 200e^{-0,1n} \times e^{-0,1}(1 - e^{-0,1}) - 200e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1}) \\ D_{n+1} - D_n &= 200e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1})[e^{-0,1} - 1] \end{aligned}$$

Étudions le signe de cette expression pour tout entier naturel n :

$$\left\{ \begin{array}{l} 200e^{-0,1n} \geq 0 \\ 1 - e^{-0,1} \geq 0 \\ e^{-0,1} - 1 \leq 0 \end{array} \right. \xRightarrow{\text{par produit}} \mathcal{D}_{n+1} - \mathcal{D}_n \leq 0 \Rightarrow \text{la suite } (\mathcal{D}_n) \text{ est décroissante.}$$

Calculons alors la limite de cette suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 200e^{-0,1n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-0,1} = 1 - e^{-0,1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-0,1} - 1 = e^{-0,1} - 1 \end{array} \right. \xRightarrow{\text{par produit } n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 0$$

Nous trouvons une limite de 0 pour D_n . Puisque la baguette tend à se stabiliser à la température ambiante, la diminution de température entre la n -ième et la $(n + 1)$ -ième minute va tendre vers 0. Le résultat était bien prévisible dans le contexte de l'exercice.