## Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 15$.

**►1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-10)\,(x-3) &= -0{,}5\,(x \times x - 10 \times x - 3 \times x - 10 \times (-3)) \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 13\,x + 30\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-13\,x) - 0{,}5 \times 30 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 15 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-6{,}5)^2 + 6{,}125 &= -0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 6{,}5 \times x + 6{,}5^2\right) + 6{,}125 \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 13\,x + 42{,}25\right) + 6{,}125 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-13\,x) - 0{,}5 \times 42{,}25 + 6{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 21{,}125 + 6{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 15 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

**►2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-10)\,(x-3) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x - 10 = 0 &\text{ ou } x - 3 = 0 \\
x = 10 &\text{ ou } x = 3
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 10 et 3.

**b)** $f\,(x) = -15$ On remarque que la forme développée contient la constante $-15$ : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -15 \\
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 15 &= -15 \\
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 15 + 15 &= -15 + 15 \\
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x &= 0 \\
-0{,}5\,x \times x + 6{,}5 \times x &= 0 \\
x\,(-0{,}5\,x + 6{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x + 6{,}5 = 0 \\
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = -6{,}5 \\
&x = 0 \text{ ou } x = \frac{-6{,}5}{-0{,}5} \\
&x = 0 \text{ ou } x = 13
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 13$.

**c)** $f(x) = 6{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante 6,125 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 6{,}125 \\ -0{,}5\,(x-6{,}5)^2 + 6{,}125 &= 6{,}125 \\ -0{,}5\,(x-6{,}5)^2 + 6{,}125 - 6{,}125 &= 6{,}125 - 6{,}125 \\ -0{,}5\,(x-6{,}5)^2 &= 0 \\ (x-6{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 6{,}5 &= 0 \\ x &= 6{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 6{,}5$.

**►3. a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{6{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit 6,5, et $f(6{,}5) = -0{,}5 \times 6{,}5^2 + 6{,}5 \times 6{,}5 - 15 = 6{,}125$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $6{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | $6{,}125$ | ↘ | |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x-10)\,(x-3)$.

- Le premier facteur $x - 10$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{1} = 10$.
- Le second facteur $x - 3$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -3$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $10$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x - 10$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x - 3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) = -0{,}5\,(x-10)\,(x-3)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**►4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [3\,;\,10]$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par $f$ est 6,125. Le maximum de $f$ est donc 6,125, et il est atteint pour $x = 6{,}5$.

## Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 - 38\,x - 180$.

**▶1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\,(x+10)\,(x+9) &= -2\,(x \times x + 10 \times x + 9 \times x + 10 \times 9) \\
&= -2\left(x^2 + 19\,x + 90\right) \\
&= -2 \times x^2 - 2 \times 19\,x - 2 \times 90 \\
&= -2\,x^2 - 38\,x - 180 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-2\,(x+9{,}5)^2 + 0{,}50 &= -2\left(x^2 + 2 \times 9{,}5 \times x + 9{,}5^2\right) + 0{,}50 \\
&= -2\left(x^2 + 19\,x + 90{,}25\right) + 0{,}50 \\
&= -2 \times x^2 - 2 \times 19\,x - 2 \times 90{,}25 + 0{,}50 \\
&= -2\,x^2 - 38\,x - 180{,}50 + 0{,}50 \\
&= -2\,x^2 - 38\,x - 180 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

**▶2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2\,(x+10)\,(x+9) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 10 = 0 &\text{ ou } x + 9 = 0 \\
x = -10 &\text{ ou } x = -9
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $-10$ et $-9$.

**b)** $f\,(x) = -180$ On remarque que la forme développée contient la constante $-180$ : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -180 \\
-2\,x^2 - 38\,x - 180 &= -180 \\
-2\,x^2 - 38\,x - 180 + 180 &= -180 + 180 \\
-2\,x^2 - 38\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-2\,x^2 - 38\,x &= 0 \\
-2\,x \times x - 38 \times x &= 0 \\
x\,(-2\,x - 38) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-2\,x - 38 = 0$

$x = 0$ ou $-2\,x = 38$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{38}{-2}$

$x = 0$ ou $x = -19$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -19$.

**c)** $f\,(x) = 0{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante 0,50 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= 0{,}50 \\ -2\,(x+9{,}5)^2 + 0{,}50 &= 0{,}50 \\ -2\,(x+9{,}5)^2 + 0{,}50 - 0{,}50 &= 0{,}50 - 0{,}50 \\ -2\,(x+9{,}5)^2 &= 0 \\ (x+9{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 9{,}5 &= 0 \\ x &= -9{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -9{,}5$.

**▶3.** **a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-38}{2\times(-2)}$, soit $-9{,}5$, et $f\,(-9{,}5) = -2 \times (-9{,}5)^2 - 38 \times (-9{,}5) - 180 = 0{,}50$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-9{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f\,(x)$ | | $\nearrow$ | $0{,}50$ | $\searrow$ | |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f\,(x) = -2\,(x+10)\,(x+9)$.

- Le premier facteur $x + 10$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{1} = -10$.
- Le second facteur $x + 9$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 9$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{9}{1} = -9$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-10$ | | $-9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x + 10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x + 9$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x) = -2\,(x+10)\,(x+9)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

▶**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-10\,;\,-9]$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par $f$ est 0,50. Le maximum de $f$ est donc 0,50, et il est atteint pour $x = -9{,}5$.

## Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 + 4\,x + 16$.

▶**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -2\,(x-4)\,(x+2) &= -2\,(x \times x - 4 \times x + 2 \times x - 4 \times 2) \\ &= -2\left(x^2 - 2\,x - 8\right) \\ &= -2 \times x^2 - 2 \times (-2\,x) - 2 \times (-8) \\ &= -2\,x^2 + 4\,x + 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -2\,(x-1)^2 + 18 &= -2\left(x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2\right) + 18 \\ &= -2\left(x^2 - 2\,x + 1\right) + 18 \\ &= -2 \times x^2 - 2 \times (-2\,x) - 2 \times 1 + 18 \\ &= -2\,x^2 + 4\,x - 2 + 18 \\ &= -2\,x^2 + 4\,x + 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

▶**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2\,(x-4)\,(x+2) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x - 4 = 0 &\text{ ou } x + 2 = 0 \\ x = 4 &\text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 4 et $-2$.

**b)** $f(x) = 16$ On remarque que la forme développée contient la constante 16 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 16 \\ -2\,x^2 + 4\,x + 16 &= 16 \\ -2\,x^2 + 4\,x + 16 - 16 &= 16 - 16 \\ -2\,x^2 + 4\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -2\,x^2 + 4\,x &= 0 \\ -2\,x \times x + 4 \times x &= 0 \\ x\,(-2\,x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-2\,x + 4 = 0$
$x = 0$ ou $-2\,x = -4$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-4}{-2}$
$x = 0$ ou $x = 2$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$.

**c)** $f(x) = 18$ On remarque que la forme canonique contient la constante 18 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 18 \\ -2\,(x-1)^2 + 18 &= 18 \\ -2\,(x-1)^2 + 18 - 18 &= 18 - 18 \\ -2\,(x-1)^2 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 1$.

**►3. a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{4}{2\times(-2)}$, soit 1, et $f(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 + 16 = 18$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $18$ | $\searrow$ |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2\,(x-4)\,(x+2)$.

- Le premier facteur $x-4$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.
- Le second facteur $x+2$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) = -2\,(x-4)\,(x+2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**▶4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-2\,;\,4]$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par $f$ est 18. Le maximum de $f$ est donc 18, et il est atteint pour $x=1$.

## Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 + 9\,x + 32{,}5$.

**▶1. a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+5)\,(x+13) &= 0{,}5\,(x \times x + 5 \times x + 13 \times x + 5 \times 13)\\
&= 0{,}5\,\left(x^2 + 18\,x + 65\right)\\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 18\,x + 0{,}5 \times 65\\
&= 0{,}5\,x^2 + 9\,x + 32{,}5\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+9)^2 - 8 &= 0{,}5\,\left(x^2 + 2 \times 9 \times x + 9^2\right) - 8\\
&= 0{,}5\,\left(x^2 + 18\,x + 81\right) - 8\\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 18\,x + 0{,}5 \times 81 - 8\\
&= 0{,}5\,x^2 + 9\,x + 40{,}5 - 8\\
&= 0{,}5\,x^2 + 9\,x + 32{,}5\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de $f$.

**a)** En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+5)\,(x+13) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x+5=0 &\text{ ou } x+13=0 \\ x=-5 &\text{ ou } x=-13 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $-5$ et $-13$.

**b)** $f(x) = 32{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante 32,5 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 32{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 + 9\,x + 32{,}5 &= 32{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 + 9\,x + 32{,}5 - 32{,}5 &= 32{,}5 - 32{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 + 9\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par $x$, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 + 9\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x + 9 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x + 9) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x + 9 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x = -9 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-9}{0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -18 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -18$.

**c)** $f(x) = -8$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-8$ : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -8 \\ 0{,}5\,(x+9)^2 - 8 &= -8 \\ 0{,}5\,(x+9)^2 - 8 + 8 &= -8 + 8 \\ 0{,}5\,(x+9)^2 &= 0 \\ (x+9)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+9 &= 0 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -9$.

**►3.** **a)** *Dresser le tableau de variations de $f$.* Dans la forme développée, le coefficient devant le $x^2$ est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{9}{2\times 0,5}$, soit $-9$, et $f(-9) = 0,5 \times (-9)^2 + 9 \times (-9) + 32,5 = -8$. Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $-\infty$ | $-9$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-8$ | ↗ |

**b)** *Dresser le tableau de signes de $f$.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0,5\,(x+5)\,(x+13)$.

- Le premier facteur $x + 5$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 5$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$.
- Le second facteur $x + 13$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-13$ | | $-5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0,5$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x + 5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 13$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) = 0,5\,(x+5)\,(x+13)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**►4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

**a)** *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que $f$ est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-13\right] \cup \left[-5\,;\,+\infty\right[$

**b)** *Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par $f$ est $-8$. Le minimum de $f$ est donc $-8$, et il est atteint pour $x = -9$.