Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 14\,x - 97{,}5$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -0{,}5\ (x-13)\ (x-15) &= -0{,}5\ (x \times x - 13 \times x - 15 \times x - 13 \times (-15)) \\ &= -0{,}5\ \left(x^2 - 28\,x + 195\right) \\ &= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-28\,x) - 0{,}5 \times 195 \\ &= -0{,}5\,x^2 + 14\,x - 97{,}5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -0{,}5\ (x-14)^2 + 0{,}5 &= -0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 14 \times x + 14^2\right) + 0{,}5 \\ &= -0{,}5\ \left(x^2 - 28\,x + 196\right) + 0{,}5 \\ &= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-28\,x) - 0{,}5 \times 196 + 0{,}5 \\ &= -0{,}5\,x^2 + 14\,x - 98 + 0{,}5 \\ &= -0{,}5\,x^2 + 14\,x - 97{,}5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x-13)\,(x-15) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x - 13 = 0 &\text{ ou } x - 15 = 0 \\ x = 13 &\text{ ou } x = 15 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 13 et 15.

b) $f(x) = -97{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante $-97{,}5$: celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -97{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + 14\,x - 97{,}5 &= -97{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + 14\,x - 97{,}5 + 97{,}5 &= -97{,}5 + 97{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + 14\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 + 14\,x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x + 14 \times x &= 0 \\ x\ (-0{,}5\,x + 14) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x + 14 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = -14 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-14}{-0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 28 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 28$.

c) $f(x) = 0{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante 0,5 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}5 \\ -0{,}5\,(x-14)^2 + 0{,}5 &= 0{,}5 \\ -0{,}5\,(x-14)^2 + 0{,}5 - 0{,}5 &= 0{,}5 - 0{,}5 \\ -0{,}5\,(x-14)^2 &= 0 \\ (x-14)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 14 &= 0 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 14$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{14}{2\times(-0{,}5)}$, soit 14, et $f(14) = -0{,}5 \times 14^2 + 14 \times 14 - 97{,}5 = 0{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	14	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0,5	$\searrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x-13)\,(x-15)$.

- Le premier facteur $x - 13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-13}{1} = 13$.
- Le second facteur $x - 15$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -15$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-15}{1} = 15$.

x	$-\infty$		13		15		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x - 13$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 15$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\,(x-13)\,(x-15)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [13\,;\,15]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 0,5. Le maximum de f est donc 0,5, et il est atteint pour $x = 14$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x + 15$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x+2)\ (x-15) &= -0{,}5\ (x \times x + 2 \times x - 15 \times x + 2 \times\ (-15)) \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 - 13\,x - 30\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times\ (-13\,x) - 0{,}5 \times\ (-30) \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x + 15 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x-6{,}5)^2 + 36{,}125 &= -0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 6{,}5 \times x + 6{,}5^2\right) + 36{,}125 \\
&= -0{,}5\ \left(x^2 - 13\,x + 42{,}25\right) + 36{,}125 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times\ (-13\,x) - 0{,}5 \times 42{,}25 + 36{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x - 21{,}125 + 36{,}125 \\
&= -0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x + 15 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+2)\,(x-15) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 2 = 0 &\text{ ou } x - 15 = 0 \\
x = -2 &\text{ ou } x = 15
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -2 et 15.

b) $f\,(x) = 15$ On remarque que la forme développée contient la constante 15 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= 15 \\
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x + 15 &= 15 \\
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x + 15 - 15 &= 15 - 15 \\
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 + 6{,}5\,x &= 0 \\
-0{,}5\,x \times x + 6{,}5 \times x &= 0 \\
x\ (-0{,}5\,x + 6{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $-0{,}5\,x + 6{,}5 = 0$

$x = 0$ ou $-0{,}5\,x = -6{,}5$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{-6{,}5}{-0{,}5}$

$x = 0$ ou $x = 13$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 13$.

c) $f(x) = 36{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante 36,125 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 36{,}125 \\ -0{,}5\,(x-6{,}5)^2 + 36{,}125 &= 36{,}125 \\ -0{,}5\,(x-6{,}5)^2 + 36{,}125 - 36{,}125 &= 36{,}125 - 36{,}125 \\ -0{,}5\,(x-6{,}5)^2 &= 0 \\ (x-6{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 6{,}5 &= 0 \\ x &= 6{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 6{,}5$.

▶3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{6{,}5}{2\times(-0{,}5)}$, soit 6,5, et $f(6{,}5) = -0{,}5 \times 6{,}5^2 + 6{,}5 \times 6{,}5 + 15 = 36{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$6{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$36{,}125$	$\searrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\,(x+2)\,(x-15)$.

- Le premier facteur $x + 2$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.
- Le second facteur $x - 15$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -15$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-15}{1} = 15$.

x	$-\infty$		-2		15		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 15$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\ (x+2)\ (x-15)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-2\,;\,15]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 36,125. Le maximum de f est donc 36,125, et il est atteint pour $x = 6{,}5$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 - 4\,x - 10$.

►**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 0{,}5\ (x+2)\ (x-10) &= 0{,}5\ (x \times x + 2 \times x - 10 \times x + 2 \times\ (-10)) \\ &= 0{,}5\ \left(x^2 - 8\,x - 20\right) \\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times\ (-8\,x) + 0{,}5 \times\ (-20) \\ &= 0{,}5\,x^2 - 4\,x - 10 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 0{,}5\ (x-4)^2 - 18 &= 0{,}5\ \left(x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2\right) - 18 \\ &= 0{,}5\ \left(x^2 - 8\,x + 16\right) - 18 \\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times\ (-8\,x) + 0{,}5 \times 16 - 18 \\ &= 0{,}5\,x^2 - 4\,x + 8 - 18 \\ &= 0{,}5\,x^2 - 4\,x - 10 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+2)\,(x-10) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 2 = 0 &\text{ ou } x - 10 = 0 \\ x = -2 &\text{ ou } x = 10 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -2 et 10.

b) $f(x) = -10$ On remarque que la forme développée contient la constante -10 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -10 \\ 0{,}5\,x^2 - 4\,x - 10 &= -10 \\ 0{,}5\,x^2 - 4\,x - 10 + 10 &= -10 + 10 \\ 0{,}5\,x^2 - 4\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 - 4\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x - 4 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x - 4 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x = 4 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 8 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 8$.

c) $f(x) = -18$ On remarque que la forme canonique contient la constante -18 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -18 \\ 0{,}5\,(x-4)^2 - 18 &= -18 \\ 0{,}5\,(x-4)^2 - 18 + 18 &= -18 + 18 \\ 0{,}5\,(x-4)^2 &= 0 \\ (x-4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 4$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-4}{2\times 0{,}5}$, soit 4, et $f(4) = 0{,}5 \times 4^2 - 4 \times 4 - 10 = -18$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-18	$\nearrow$

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\,(x+2)\,(x-10)$.

- Le premier facteur $x+2$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.
- Le second facteur $x-10$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a=1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b=-10$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{1} = 10$.

x	$-\infty$		-2		10		$+\infty$
$0{,}5$		$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 0{,}5\,(x+2)\,(x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in]-\infty\,;\,-2] \cup [10\,;\,+\infty[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est -18. Le minimum de f est donc -18, et il est atteint pour $x=4$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 + x + 17{,}5$.

►1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x+5)\,(x-7) &= -0{,}5\,(x \times x + 5 \times x - 7 \times x + 5 \times (-7)) \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 2\,x - 35\right) \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-2\,x) - 0{,}5 \times (-35) \\
&= -0{,}5\,x^2 + x + 17{,}5 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,(x-1)^2 + 18 &= -0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2\right) + 18 \\
&= -0{,}5\,\left(x^2 - 2\,x + 1\right) + 18 \\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times (-2\,x) - 0{,}5 \times 1 + 18 \\
&= -0{,}5\,x^2 + x - 0{,}5 + 18 \\
&= -0{,}5\,x^2 + x + 17{,}5 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+5)\,(x-7) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x+5 &= 0 \text{ ou } x-7 = 0 \\ x &= -5 \text{ ou } x = 7 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -5 et 7.

b) $f(x) = 17{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante 17,5 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 17{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + x + 17{,}5 &= 17{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + x + 17{,}5 - 17{,}5 &= 17{,}5 - 17{,}5 \\ -0{,}5\,x^2 + x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x^2 + x &= 0 \\ -0{,}5\,x \times x + 1 \times x &= 0 \\ x\,(-0{,}5\,x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x + 1 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = -1 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-1}{-0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$.

c) $f(x) = 18$ On remarque que la forme canonique contient la constante 18 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 18 \\ -0{,}5\,(x-1)^2 + 18 &= 18 \\ -0{,}5\,(x-1)^2 + 18 - 18 &= 18 - 18 \\ -0{,}5\,(x-1)^2 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 1$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{1}{2\times(-0{,}5)}$, soit 1, et $f(1) = -0{,}5 \times 1^2 + 1 \times 1 + 17{,}5 = 18$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	18	$\searrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\ (x+5)\ (x-7)$.

- Le premier facteur $x+5$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 5$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$.
- Le second facteur $x-7$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -7$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$.

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x\ +\ 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x\ -\ 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)\ =$ $-0{,}5\ (x+5)\ (x-7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-5\,;\,7]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 18. Le maximum de f est donc 18, et il est atteint pour $x = 1$.