Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -0{,}5\,x^2 - 5\,x + 28$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x+14)\ (x-4) &= -0{,}5\ (x \times x + 14 \times x - 4 \times x + 14 \times\ (-4))\\
&= -0{,}5\ \left(x^2 + 10\,x - 56\right)\\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 10\,x - 0{,}5 \times\ (-56)\\
&= -0{,}5\,x^2 - 5\,x + 28\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
-0{,}5\ (x+5)^2 + 40{,}5 &= -0{,}5\ \left(x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2\right) + 40{,}5\\
&= -0{,}5\ \left(x^2 + 10\,x + 25\right) + 40{,}5\\
&= -0{,}5 \times x^2 - 0{,}5 \times 10\,x - 0{,}5 \times 25 + 40{,}5\\
&= -0{,}5\,x^2 - 5\,x - 12{,}5 + 40{,}5\\
&= -0{,}5\,x^2 - 5\,x + 28\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-0{,}5\,(x+14)\,(x-4) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 14 = 0 &\text{ ou } x - 4 = 0\\
x = -14 &\text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -14 et 4.

b) $f\,(x) = 28$ On remarque que la forme développée contient la constante 28 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= 28\\
-0{,}5\,x^2 - 5\,x + 28 &= 28\\
-0{,}5\,x^2 - 5\,x + 28 - 28 &= 28 - 28\\
-0{,}5\,x^2 - 5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
-0{,}5\,x^2 - 5\,x &= 0\\
-0{,}5\,x \times x - 5 \times x &= 0\\
x\ (-0{,}5\,x - 5) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x - 5 = 0\\
&x = 0 \text{ ou } -0{,}5\,x = 5\\
&x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{-0{,}5}\\
&x = 0 \text{ ou } x = -10
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -10$.

c) $f(x) = 40{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante 40,5 : en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 40{,}5 \\ -0{,}5\ (x+5)^2 + 40{,}5 &= 40{,}5 \\ -0{,}5\ (x+5)^2 + 40{,}5 - 40{,}5 &= 40{,}5 - 40{,}5 \\ -0{,}5\ (x+5)^2 &= 0 \\ (x+5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+5 &= 0 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -5$.

▶3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-5}{2\times(-0{,}5)}$, soit -5, et $f(-5) = -0{,}5 \times (-5)^2 - 5 \times (-5) + 28 = 40{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		↗	$40{,}5$	↘	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -0{,}5\ (x+14)\ (x-4)$.

- Le premier facteur $x+14$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 14$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{14}{1} = -14$.
- Le second facteur $x-4$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

x	$-\infty$		-14		4		$+\infty$
$-0{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$x + 14$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -0{,}5\ (x+14)\ (x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-14\,;\,4]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 40,5. Le maximum de f est donc 40,5, et il est atteint pour $x = -5$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 + 2\,x - 82{,}5$.

►1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x-11)\,(x+15) &= 0{,}5\,(x \times x - 11 \times x + 15 \times x - 11 \times 15)\\
&= 0{,}5\,\left(x^2 + 4\,x - 165\right)\\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 4\,x + 0{,}5 \times (-165)\\
&= 0{,}5\,x^2 + 2\,x - 82{,}5\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+2)^2 - 84{,}5 &= 0{,}5\,\left(x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2\right) - 84{,}5\\
&= 0{,}5\,\left(x^2 + 4\,x + 4\right) - 84{,}5\\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 4\,x + 0{,}5 \times 4 - 84{,}5\\
&= 0{,}5\,x^2 + 2\,x + 2 - 84{,}5\\
&= 0{,}5\,x^2 + 2\,x - 82{,}5\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x-11)\,(x+15) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x - 11 = 0 &\text{ ou } x + 15 = 0\\
x = 11 &\text{ ou } x = -15
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : 11 et -15.

b) $f\,(x) = -82{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante $-82{,}5$: celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -82{,}5\\
0{,}5\,x^2 + 2\,x - 82{,}5 &= -82{,}5\\
0{,}5\,x^2 + 2\,x - 82{,}5 + 82{,}5 &= -82{,}5 + 82{,}5\\
0{,}5\,x^2 + 2\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
0{,}5\,x^2 + 2\,x &= 0\\
0{,}5\,x \times x + 2 \times x &= 0\\
x\,(0{,}5\,x + 2) &= 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x + 2 = 0$
$x = 0$ ou $0{,}5\,x = -2$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-2}{0{,}5}$
$x = 0$ ou $x = -4$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

c) $f(x) = -84{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-84{,}5$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -84{,}5\\
0{,}5\,(x+2)^2 - 84{,}5 &= -84{,}5\\
0{,}5\,(x+2)^2 - 84{,}5 + 84{,}5 &= -84{,}5 + 84{,}5\\
0{,}5\,(x+2)^2 &= 0\\
(x+2)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned}
x + 2 &= 0\\
x &= -2
\end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -2$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{2}{2\times 0{,}5}$, soit -2, et $f(-2) = 0{,}5 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 82{,}5 = -84{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-84{,}5$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\,(x-11)\,(x+15)$.

- Le premier facteur $x - 11$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -11$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-11}{1} = 11$.
- Le second facteur $x + 15$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 15$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{15}{1} = -15$.

x	$-\infty$		-15		11		$+\infty$
0,5		$+$		$+$		$+$	
$x - 11$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 15$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = 0{,}5\,(x-11)\,(x+15)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-15\right] \cup \left[11\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-84{,}5$. Le minimum de f est donc $-84{,}5$, et il est atteint pour $x = -2$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto -2\,x^2 - 26\,x - 44$.

►1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -2\,(x+11)\,(x+2) &= -2\,(x\times x + 11\times x + 2\times x + 11\times 2)\\ &= -2\left(x^2 + 13\,x + 22\right)\\ &= -2\times x^2 - 2\times 13\,x - 2\times 22\\ &= -2\,x^2 - 26\,x - 44\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} -2\,(x+6{,}5)^2 + 40{,}50 &= -2\left(x^2 + 2\times 6{,}5\times x + 6{,}5^2\right) + 40{,}50\\ &= -2\left(x^2 + 13\,x + 42{,}25\right) + 40{,}50\\ &= -2\times x^2 - 2\times 13\,x - 2\times 42{,}25 + 40{,}50\\ &= -2\,x^2 - 26\,x - 84{,}50 + 40{,}50\\ &= -2\,x^2 - 26\,x - 44\\ &= f(x)\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $-2\,(x+11)\,(x+2) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 11 = 0 &\text{ ou } x + 2 = 0\\ x = -11 &\text{ ou } x = -2\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -11 et -2.

b) $f(x) = -44$ On remarque que la forme développée contient la constante -44 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -44 \\ -2\,x^2 - 26\,x - 44 &= -44 \\ -2\,x^2 - 26\,x - 44 + 44 &= -44 + 44 \\ -2\,x^2 - 26\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} -2\,x^2 - 26\,x &= 0 \\ -2\,x \times x - 26 \times x &= 0 \\ x\,(-2\,x - 26) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } -2\,x - 26 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } -2\,x = 26 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{26}{-2} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -13 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -13$.

c) $f(x) = 40{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $40{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= 40{,}50 \\ -2\,(x + 6{,}5)^2 + 40{,}50 &= 40{,}50 \\ -2\,(x + 6{,}5)^2 + 40{,}50 - 40{,}50 &= 40{,}50 - 40{,}50 \\ -2\,(x + 6{,}5)^2 &= 0 \\ (x + 6{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 6{,}5 &= 0 \\ x &= -6{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -6{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est négatif , donc la fonction est croissante puis décroissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-26}{2\times(-2)}$, soit $-6{,}5$, et $f(-6{,}5) = -2 \times (-6{,}5)^2 - 26 \times (-6{,}5) - 44 = 40{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$-6{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$40{,}50$	↘

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = -2(x+11)(x+2)$.

- Le premier facteur $x + 11$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 11$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{11}{1} = -11$.
- Le second facteur $x + 2$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.

x	$-\infty$		-11		-2		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+11$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -2(x+11)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

►**4.** Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur l'intervalle central . Les solutions sont donc :

$x \in [-11\,;\,-2]$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus grande valeur prise par f est 40,50. Le maximum de f est donc 40,50, et il est atteint pour $x = -6{,}5$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 + 8\,x + 31{,}5$.

►**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+9)\,(x+7) &= 0{,}5\,(x \times x + 9 \times x + 7 \times x + 9 \times 7)\\
&= 0{,}5\,\left(x^2 + 16\,x + 63\right)\\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 16\,x + 0{,}5 \times 63\\
&= 0{,}5\,x^2 + 8\,x + 31{,}5\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+8)^2 - 0{,}5 &= 0{,}5\,\left(x^2 + 2 \times 8 \times x + 8^2\right) - 0{,}5\\
&= 0{,}5\,\left(x^2 + 16\,x + 64\right) - 0{,}5\\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 16\,x + 0{,}5 \times 64 - 0{,}5\\
&= 0{,}5\,x^2 + 8\,x + 32 - 0{,}5\\
&= 0{,}5\,x^2 + 8\,x + 31{,}5\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

►**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+9)\,(x+7) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x+9=0 &\text{ ou } x+7=0 \\ x=-9 &\text{ ou } x=-7 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -9 et -7.

b) $f(x) = 31{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante 31,5 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 31{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 + 8\,x + 31{,}5 &= 31{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 + 8\,x + 31{,}5 - 31{,}5 &= 31{,}5 - 31{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 + 8\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 + 8\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x + 8 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x + 8) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x + 8 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x = -8 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-8}{0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -16 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -16$.

c) $f(x) = -0{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-0{,}5$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}5 \\ 0{,}5\,(x+8)^2 - 0{,}5 &= -0{,}5 \\ 0{,}5\,(x+8)^2 - 0{,}5 + 0{,}5 &= -0{,}5 + 0{,}5 \\ 0{,}5\,(x+8)^2 &= 0 \\ (x+8)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+8 &= 0 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -8$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{8}{2\times 0{,}5}$, soit -8, et $f(-8) = 0{,}5 \times (-8)^2 + 8 \times (-8) + 31{,}5 = -0{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\,(x+9)\,(x+7)$.

- Le premier facteur $x+9$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 9$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{9}{1} = -9$.
- Le second facteur $x+7$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 7$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = -7$.

x	$-\infty$		-9		-7		$+\infty$
$0{,}5$		$+$		$+$		$+$	
$x + 9$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 0{,}5\,(x+9)\,(x+7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-9\right] \cup \left[-7\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-0{,}5$. Le minimum de f est donc $-0{,}5$, et il est atteint pour $x = -8$.