Corrigé de l'exercice 1

►**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [1\ ;\ 10]$ par $h(x) = \dfrac{4x-3}{-5x-1}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5x-1=0$.

$$\begin{aligned} -5x-1 &= 0 \\ -5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{-5} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[1\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [1\ ;\ 10]$.

$$h'(x) = \frac{4 \times (-5x-1) - (4x-3) \times (-5)}{(-5x-1)^2} = \frac{-19}{(-5x-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-5x-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-19 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	1		10
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$-\dfrac{1}{6}$	$\searrow$	$-\dfrac{37}{51}$

►**2.** Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 2x^3 - 18x^2 - 96x + 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 6x^2 - 36x - 96$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-36)^2 - 4 \times 6 \times (-96) = 3\,600$ et $\sqrt{3\,600} = 60$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-36) - \sqrt{3\,600}}{2 \times 6} &= \frac{36 - \sqrt{3\,600}}{12} \\ &= \frac{36-60}{12} \\ &= \frac{-24}{12} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-36) + \sqrt{3\,600}}{2 \times 6} &= \frac{36 + \sqrt{3\,600}}{12} \\ &= \frac{36+60}{12} \\ &= \frac{96}{12} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 8$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$3-\sqrt{7}$		$3+\sqrt{7}$		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		$3-\sqrt{7}$		$3+\sqrt{7}$		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-2\,832$	$\nearrow$	-388	$\searrow$	-388	$\nearrow$	-752

Corrigé de l'exercice 2

▶**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $h(x) = \dfrac{-5x+2}{4x+7}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4x+7=0$.

$$\begin{aligned} 4x+7 &= 0 \\ 4x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{7}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-1\ ;\ 10]$.

$$h'(x) = \frac{(-5)\times(4x+7)-(-5x+2)\times 4}{(4x+7)^2} = \frac{-43}{(4x+7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(4x+7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-43 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-1		10
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\frac{48}{47}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 216x + 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$q'(x) = 3x^2 + 3x - 216$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 3^2 - 4\times 3\times(-216) = 2\,601$ et $\sqrt{2\,601} = 51$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-3-\sqrt{2\,601}}{2\times 3} &= \frac{-3-\sqrt{2\,601}}{6} \\ &= \frac{-3-51}{6} \\ &= \frac{-54}{6} \\ &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3+\sqrt{2\,601}}{2\times 3} &= \frac{-3+\sqrt{2\,601}}{6} \\ &= \frac{-3+51}{6} \\ &= \frac{48}{6} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-9		8		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-9		8		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	$1\,314$	$\nearrow$	$\frac{2\,681}{2}$	$\searrow$	$-1\,116$	$\nearrow$	$-1\,006$

Corrigé de l'exercice 3

▶1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 3]$ par $k(t) = \dfrac{-3t+1}{2t-7}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 2t - 7 &= 0 \\ 2t &= 7 \\ t &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{7}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 3]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 3]$.

$$k'(t) = \frac{(-3) \times (2t-7) - (-3t+1) \times 2}{(2t-7)^2} = \frac{19}{(2t-7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(2t-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $19 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	-10		3
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$-\frac{31}{27}$	$\nearrow$	8

▶2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + \dfrac{27}{2}x^2 + 54x + 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 3x^2 + 27x + 54$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 27^2 - 4 \times 3 \times 54 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-27-\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{-27-\sqrt{81}}{6} \\ &= \frac{-27-9}{6} \\ &= \frac{-36}{6} \\ &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{-27+\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{-27+\sqrt{81}}{6} \\ &= \frac{-27+9}{6} \\ &= \frac{-18}{6} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = -3$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		-3		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		-6		-3		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	-182	$\nearrow$	-46	$\searrow$	$-\frac{119}{2}$	$\nearrow$	$2\,898$

Corrigé de l'exercice 4

▶**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $k(t) = \dfrac{-3t+6}{5t+5}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t+5=0$.

$$\begin{aligned} 5t+5 &= 0 \\ 5t &= -5 \\ t &= \frac{-5}{5} \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Or -1 n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$k'(t) = \frac{(-3)\times\ (5t+5) - (-3t+6)\times 5}{(5t+5)^2} = \frac{-45}{(5t+5)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(5t+5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-45 < 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	0		10
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$\frac{6}{5}$	$\searrow$	$-\frac{24}{55}$

►2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$ sur $[-10 ; 10]$.
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324$ et $\sqrt{324} = 18$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-6)-\sqrt{324}}{2\times 6} &= \frac{6-\sqrt{324}}{12}\\ &= \frac{6-18}{12}\\ &= \frac{-12}{12}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-6)+\sqrt{324}}{2\times 6} &= \frac{6+\sqrt{324}}{12}\\ &= \frac{6+18}{12}\\ &= \frac{24}{12}\\ &= 2\end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2\,184$	$\nearrow$	$-\frac{21}{2}$	$\searrow$	$-\frac{21}{2}$	$\nearrow$	$1\,576$

Corrigé de l'exercice 5

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [0 ; 10]$ par $h(t) = \dfrac{-5t-5}{5t+3}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t + 3 = 0$.

$$\begin{aligned}5t+3 &= 0\\ 5t &= -3\\ t &= \frac{-3}{5}\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{3}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[0 ; 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [0 ; 10]$.

$$h'(t) = \frac{(-5)\times(5t+3) - (-5t-5)\times 5}{(5t+3)^2} = \frac{10}{(5t+3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(5t+3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $10 > 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) > 0$.

t	0	10
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\dfrac{5}{3}$ ↗	$-\dfrac{55}{53}$

►2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$k'(x) = 3x^2 + 9x + 6$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times 6 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-9-\sqrt{9}}{2\times 3} &= \frac{-9-\sqrt{9}}{6}\\ &= \frac{-9-3}{6}\\ &= \frac{-12}{6}\\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-9+\sqrt{9}}{2\times 3} &= \frac{-9+\sqrt{9}}{6}\\ &= \frac{-9+3}{6}\\ &= \frac{-6}{6}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-2		-1		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		-2		-1		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	-612	↗	-4	↘	$-\dfrac{9}{2}$	↗	$1\,508$