Corrigé de l'exercice 1

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [1\ ;\ 10]$ par $f(x) = \dfrac{-x+1}{2x+1}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2x+1=0$.

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[1\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [1\ ;\ 10]$.

$$f'(x) = \frac{(-11) \times (2x+1) - (-x+1) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(2x+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-3 < 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	1		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3}{7}$

►2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = x^3 - 3x^2 - 144x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 3x^2 - 6x - 144$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-144) = 1\,764$ et $\sqrt{1\,764} = 42$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-6) - \sqrt{1\,764}}{2 \times 3} &= \frac{6 - \sqrt{1\,764}}{6} \\ &= \frac{6-42}{6} \\ &= \frac{-36}{6} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-6) + \sqrt{1\,764}}{2 \times 3} &= \frac{6 + \sqrt{1\,764}}{6} \\ &= \frac{6+42}{6} \\ &= \frac{48}{6} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 8$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$1-\sqrt{47}$		$1+\sqrt{47}$		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		$1-\sqrt{47}$		$1+\sqrt{47}$		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	141	$\nearrow$	-145	$\searrow$	-145	$\nearrow$	-739

Corrigé de l'exercice 2

▶1. On considère la fonction f définie sur $I=[-7\ ;\ 10]$ par $f(t)=\dfrac{-4t+1}{t+8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t+8=0$.

$$\begin{aligned} t+8&=0\\ t&=-8 \end{aligned}$$

Or -8 n'est pas dans l'intervalle $[-7\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t\in[-7\ ;\ 10]$.

$$f'(t)=\frac{(-4)\times\ (t+8)-(-4t+1)\times 11}{(t+8)^2}=\frac{-33}{(t+8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(t+8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-33<0$ donc pour tout t de I, $f'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	-7		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	29	$\searrow$	$-\dfrac{13}{6}$

▶2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x)=2x^3+21x^2+72x+4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$f'(x)=6x^2+42x+72$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta=42^2-4\times 6\times 72=36$ et $\sqrt{36}=6$.
Comme $\Delta>0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-42-\sqrt{36}}{2\times 6}&=\frac{-42-\sqrt{36}}{12}\\ &=\frac{-42-6}{12}\\ &=\frac{-48}{12}\\ &=-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-42+\sqrt{36}}{2\times 6}&=\frac{-42+\sqrt{36}}{12}\\ &=\frac{-42+6}{12}\\ &=\frac{-36}{12}\\ &=-3 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1=-4$ et $x_2=-3$.
Comme $\Delta>0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-4		-3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		-4		-3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-616	$\nearrow$	-76	$\searrow$	-77	$\nearrow$	$4\,824$

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 5]$ par $f(t) = \dfrac{-5t+6}{-t+6}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-t+6=0$.

$$\begin{aligned} -t+6 &= 0 \\ -t &= -6 \\ t &= \frac{-6}{-1} \\ t &= 6 \end{aligned}$$

Or 6 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 5]$.

$$f'(t) = \frac{(-5) \times (-t+6) - (-5t+6) \times (-11)}{(-t+6)^2} = \frac{-24}{(-t+6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-t+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-24 < 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		5
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	-19

►**2.** Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 3x^3 + \dfrac{27}{2}x^2 + 18x + 5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 9x^2 + 27x + 18$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 27^2 - 4 \times 9 \times 18 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-27-\sqrt{81}}{2\times 9} &= \frac{-27-\sqrt{81}}{18}\\ &= \frac{-27-9}{18}\\ &= \frac{-36}{18}\\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-27+\sqrt{81}}{2\times 9} &= \frac{-27+\sqrt{81}}{18}\\ &= \frac{-27+9}{18}\\ &= \frac{-18}{18}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-2		-1		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		-2		-1		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-1\,825$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$4\,535$

Corrigé de l'exercice 4

►**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [-10\ ;\ 2]$ par $g(t) = \dfrac{-5t-3}{-t+3}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-t+3 = 0$.

$$\begin{aligned}-t+3 &= 0\\ -t &= -3\\ t &= \frac{-3}{-1}\\ t &= 3\end{aligned}$$

Or 3 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 2]$.

$$g'(t) = \frac{(-5)\times(-t+3) - (-5t-3)\times(-11)}{(-t+3)^2} = \frac{-18}{(-t+3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(-t+3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-18 < 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{47}{13}$	$\searrow$	-13

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 3x^3 - 18x^2 - 108x - 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 9x^2 - 36x - 108$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-36)^2 - 4 \times 9 \times (-108) = 5\,184$ et $\sqrt{5\,184} = 72$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-(-36) - \sqrt{5\,184}}{2 \times 9} = \frac{36 - \sqrt{5\,184}}{18} = \frac{36 - 72}{18} = \frac{-36}{18} = -2$$

$$\frac{-(-36) + \sqrt{5\,184}}{2 \times 9} = \frac{36 + \sqrt{5\,184}}{18} = \frac{36 + 72}{18} = \frac{108}{18} = 6$$

Les racines de p' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-3\,724$	↗	-268	↘	-268	↗	116

Corrigé de l'exercice 5

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 2]$ par $h(x) = \dfrac{3x+5}{x-3}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $x - 3 = 0$.

$x - 3 = 0$
$x = 3$

Or 3 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 2]$.

$$h'(x) = \frac{3 \times (x-3) - (3x+5) \times 11}{(x-3)^2} = \frac{-14}{(x-3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(x-3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-14 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		2
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\dfrac{25}{13}$	↘	-11

►**2.** Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x - 1$ sur $[-10 \ ; \ 10]$.
$h'(x) = 6x^2 - 42x + 72$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 6 \times 72 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-42) - \sqrt{36}}{2 \times 6} &= \frac{42 - \sqrt{36}}{12} \\ &= \frac{42 - 6}{12} \\ &= \frac{36}{12} \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-42) + \sqrt{36}}{2 \times 6} &= \frac{42 + \sqrt{36}}{12} \\ &= \frac{42 + 6}{12} \\ &= \frac{48}{12} \\ &= 4\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$.

x	-10 10
$h'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $h'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale h est croissante sur $[-10 \ ; \ 10]$.