Corrigé de l'exercice 1

▶**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $f(t) = \dfrac{t-3}{t-1}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t - 1 = 0$.

$t - 1 = 0$

$t = 1$

Or 1 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$f'(t) = \frac{11 \times\ (t-1) - (t-3) \times 11}{(t-1)^2} = \frac{2}{(t-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(t-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $2 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-10		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{13}{11}$	$\nearrow$	3

▶**2.** Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$k'(x) = 3x^2 + 12x + 9$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-12-\sqrt{36}}{2\times 3} &= \frac{-12-\sqrt{36}}{6}\\ &= \frac{-12-6}{6}\\ &= \frac{-18}{6}\\ &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-12+\sqrt{36}}{2\times 3} &= \frac{-12+\sqrt{36}}{6}\\ &= \frac{-12+6}{6}\\ &= \frac{-6}{6}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-3		-1		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		-3		-1		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	-483	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$1\,697$

Corrigé de l'exercice 2

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $f(t) = \dfrac{-4t+1}{5t-1}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t-1=0$.

$$\begin{aligned} 5t-1 &= 0 \\ 5t &= 1 \\ t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ -1]$.

$$f'(t) = \frac{(-4)\times(5t-1)-(-4t+1)\times 5}{(5t-1)^2} = \frac{-11}{(5t-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(5t-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-1 < 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		-1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$-\frac{41}{51}$	↘	$-\frac{5}{6}$

▶2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = 2x^3 - 12x^2 - 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$k'(x) = 6x^2 - 24x$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-24)^2 - 4\times 6 \times 0 = 576$ et $\sqrt{576} = 24$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-24)-\sqrt{576}}{2\times 6} &= \frac{24-\sqrt{576}}{12} \\ &= \frac{24-24}{12} \\ &= \frac{0}{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-24)+\sqrt{576}}{2\times 6} &= \frac{24+\sqrt{576}}{12} \\ &= \frac{24+24}{12} \\ &= \frac{48}{12} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		0		4		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		0		4		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-3\,204$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-68	$\nearrow$	796

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $k(t) = \dfrac{2t+1}{-5t+4}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5t + 4 = 0$.

$$\begin{aligned} -5t + 4 &= 0 \\ -5t &= -4 \\ t &= \frac{-4}{-5} \end{aligned}$$

Or $\frac{4}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$k'(t) = \frac{2 \times (-5t+4) - (2t+1) \times (-5)}{(-5t+4)^2} = \frac{13}{(-5t+4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(-5t+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $13 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	-10		0
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$-\frac{19}{54}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

►2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = x^3 + \frac{33}{2}x^2 + 90x + 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 3x^2 + 33x + 90$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 33^2 - 4 \times 3 \times 90 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-33-\sqrt{9}}{2\times 3} &= \frac{-33-\sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{-33-3}{6} \\ &= \frac{-36}{6} \\ &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{-33+\sqrt{9}}{2\times 3} &= \frac{-33+\sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{-33+3}{6} \\ &= \frac{-30}{6} \\ &= -5 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = -5$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		-5		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		-6		-5		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-242	$\nearrow$	-154	$\searrow$	$-\dfrac{309}{2}$	$\nearrow$	$3\,558$

Corrigé de l'exercice 4

▶1. On considère la fonction g définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $g(x) = \dfrac{-2x-6}{5x-6}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x - 6 = 0$.

$$\begin{aligned} 5x-6 &= 0 \\ 5x &= 6 \\ x &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{6}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 0]$.

$$g'(x) = \frac{(-2) \times (5x-6) - (-2x-6) \times 5}{(5x-6)^2} = \frac{42}{(5x-6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(5x-6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $42 > 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) > 0$.

x	-10		0
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	1

▶2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = 3x^3 + \dfrac{81}{2}x^2 + 162x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$k'(x) = 9x^2 + 81x + 162$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 81^2 - 4 \times 9 \times 162 = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-81-\sqrt{729}}{2\times 9} &= \frac{-81-\sqrt{729}}{18}\\ &= \frac{-81-27}{18}\\ &= \frac{-108}{18}\\ &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-81+\sqrt{729}}{2\times 9} &= \frac{-81+\sqrt{729}}{18}\\ &= \frac{-81+27}{18}\\ &= \frac{-54}{18}\\ &= -3\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = -3$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		-3		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		-6		-3		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	-569	$\nearrow$	-161	$\searrow$	$-\frac{403}{2}$	$\nearrow$	$8\,671$

Corrigé de l'exercice 5

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 3]$ par $f(t) = \dfrac{t+3}{2t-8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t - 8 = 0$.

$$\begin{aligned}2t-8 &= 0\\ 2t &= 8\\ t &= \frac{8}{2}\\ t &= 4\end{aligned}$$

Or 4 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 3]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 3]$.

$$f'(t) = \frac{11\times\ (2t-8)-(t+3)\times 2}{(2t-8)^2} = \frac{-14}{(2t-8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(2t-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-14 < 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		3
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-3

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = 2x^3 - 12x^2 - 30x + 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$q'(x) = 6x^2 - 24x - 30$

Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 6 \times\ (-30) = 1\,296$ et $\sqrt{1\,296} = 36$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-(-24) - \sqrt{1\,296}}{2 \times 6} = \frac{24 - \sqrt{1\,296}}{12} = \frac{24 - 36}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$\frac{-(-24) + \sqrt{1\,296}}{2 \times 6} = \frac{24 + \sqrt{1\,296}}{12} = \frac{24 + 36}{12} = \frac{60}{12} = 5$$

Les racines de q' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		1		3		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		1		3		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	$-2\,897$	$\nearrow$	-37	$\searrow$	-141	$\nearrow$	503