Corrigé de l'exercice 1

▶**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [-10\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{2x+5}{3x-7}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $3x - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 3x-7 &= 0 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{7}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 1]$.

$$g'(x) = \frac{2 \times (3x-7) - (2x+5) \times 3}{(3x-7)^2} = \frac{-29}{(3x-7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(3x-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-29 < 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{15}{37}$	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 3x^2 - 6x - 24$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-24) = 324$ et $\sqrt{324} = 18$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-6)-\sqrt{324}}{2\times 3} &= \frac{6-\sqrt{324}}{6} \\ &= \frac{6-18}{6} \\ &= \frac{-12}{6} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-6)+\sqrt{324}}{2\times 3} &= \frac{6+\sqrt{324}}{6} \\ &= \frac{6+18}{6} \\ &= \frac{24}{6} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$1-\sqrt{7}$		$1+\sqrt{7}$		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		$1-\sqrt{7}$		$1+\sqrt{7}$		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	$-1\,062$	$\nearrow$	-28	$\searrow$	-28	$\nearrow$	458

Corrigé de l'exercice 2

▶1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $h(t) = \dfrac{2t+3}{-3t+2}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-3t+2=0$.

$$\begin{aligned} -3t+2 &= 0 \\ -3t &= -2 \\ t &= \frac{-2}{-3} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{2}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$h'(t) = \frac{2 \times (-3t+2) - (2t+3) \times (-3)}{(-3t+2)^2} = \frac{13}{(-3t+2)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-3t+2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $13 > 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) > 0$.

t	-10		0
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\dfrac{17}{32}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$

▶2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 3x^3 + \dfrac{63}{2}x^2 - 72x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 9x^2 + 63x - 72$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 63^2 - 4 \times 9 \times (-72) = 6\,561$ et $\sqrt{6\,561} = 81$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-63-\sqrt{6\,561}}{2\times 9} &= \frac{-63-\sqrt{6\,561}}{18} \\ &= \frac{-63-81}{18} \\ &= \frac{-144}{18} \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-63+\sqrt{6\,561}}{2\times 9} &= \frac{-63+\sqrt{6\,561}}{18} \\ &= \frac{-63+81}{18} \\ &= \frac{18}{18} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -8$ et $x_2 = 1$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-8		1		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		-8		1		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	871	$\nearrow$	$1\,057$	$\searrow$	$-\dfrac{73}{2}$	$\nearrow$	$5\,431$

Corrigé de l'exercice 3

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 3]$ par $f(t) = \dfrac{-t+4}{t-4}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t - 4 = 0$.

$$t - 4 = 0$$
$$t = 4$$

Or 4 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 3]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 3]$.

$$f'(t) = \frac{(-11) \times\ (t-4) - (-t+4) \times 11}{(t-4)^2} = \frac{0}{(t-4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(t-4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $0 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-10		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	-1

▶2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = 2x^3 + 18x^2 + 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 6x^2 + 36x$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 36^2 - 4 \times 6 \times 0 = 1\,296$ et $\sqrt{1\,296} = 36$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-36-\sqrt{1\,296}}{2\times 6} &= \frac{-36-\sqrt{1\,296}}{12}\\ &= \frac{-36-36}{12}\\ &= \frac{-72}{12}\\ &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-36+\sqrt{1\,296}}{2\times 6} &= \frac{-36+\sqrt{1\,296}}{12}\\ &= \frac{-36+36}{12}\\ &= \frac{0}{12}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 0$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		0		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-6		0		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	-190	$\nearrow$	226	$\searrow$	10	$\nearrow$	$3\,810$

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $k(t) = \dfrac{-5t-6}{t+1}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t + 1 = 0$.

$t + 1 = 0$

$t = -1$

Or -1 n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$k'(t) = \frac{(-5) \times (t+1) - (-5t-6) \times 11}{(t+1)^2} = \frac{11}{(t+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(t+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $1 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	0		10
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	-6	$\nearrow$	$-\dfrac{56}{11}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 + 30x^2 + 126x - 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 + 60x + 126$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 60^2 - 4 \times 6 \times 126 = 576$ et $\sqrt{576} = 24$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-60-\sqrt{576}}{2\times 6} &= \frac{-60-\sqrt{576}}{12}\\ &= \frac{-60-24}{12}\\ &= \frac{-84}{12}\\ &= -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-60+\sqrt{576}}{2\times 6} &= \frac{-60+\sqrt{576}}{12}\\ &= \frac{-60+24}{12}\\ &= \frac{-36}{12}\\ &= -3\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -7$ et $x_2 = -3$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-7		-3		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-7		-3		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-262	$\nearrow$	-100	$\searrow$	-164	$\nearrow$	$6\,258$

Corrigé de l'exercice 5

▶1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 1]$ par $h(x) = \dfrac{-3x-2}{-x+2}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-x+2=0$.

$$\begin{aligned} -x+2 &= 0 \\ -x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{-1} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Or 2 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 1]$.

$$h'(x) = \frac{(-3)\times(-x+2) - (-3x-2)\times(-11)}{(-x+2)^2} = \frac{-8}{(-x+2)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-x+2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-8 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	-5

▶2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 3x^3 - \dfrac{63}{2}x^2 - 72x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$f'(x) = 9x^2 - 63x - 72$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-63)^2 - 4\times 9\times(-72) = 6\,561$ et $\sqrt{6\,561} = 81$.

Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-63)-\sqrt{6\,561}}{2\times 9} &= \frac{63-\sqrt{6\,561}}{18}\\ &= \frac{63-81}{18}\\ &= \frac{-18}{18}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-63)+\sqrt{6\,561}}{2\times 9} &= \frac{63+\sqrt{6\,561}}{18}\\ &= \frac{63+81}{18}\\ &= \frac{144}{18}\\ &= 8\end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 8$.

x	-10 $\qquad$ 10
$f'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $f'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale f est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.