Corrigé de l'exercice 1

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $f(x) = \dfrac{2x-9}{4x-1}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4x - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x-1 &= 0 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ -1]$.

$$f'(x) = \frac{2 \times (4x-1) - (2x-9) \times 4}{(4x-1)^2} = \frac{34}{(4x-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(4x-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $34 > 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) > 0$.

x	-10		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{29}{41}$	$\nearrow$	$\frac{11}{5}$

►**2.** Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 126x + 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$q'(x) = 3x^2 + 3x - 126$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times (-126) = 1\,521$ et $\sqrt{1\,521} = 39$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-3-\sqrt{1\,521}}{2 \times 3} &= \frac{-3-\sqrt{1\,521}}{6} \\ &= \frac{-3-39}{6} \\ &= \frac{-42}{6} \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3+\sqrt{1\,521}}{2 \times 3} &= \frac{-3+\sqrt{1\,521}}{6} \\ &= \frac{-3+39}{6} \\ &= \frac{36}{6} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -7$ et $x_2 = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-7		6		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-7		6		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	412	$\nearrow$	$\dfrac{1\,229}{2}$	$\searrow$	-484	$\nearrow$	-108

Corrigé de l'exercice 2

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $f(t) = \dfrac{t+4}{-4t-9}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-4t - 9 = 0$.

$$\begin{aligned} -4t - 9 &= 0 \\ -4t &= 9 \\ t &= \frac{9}{-4} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{9}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$f'(t) = \frac{11 \times (-4t-9) - (t+4) \times (-4)}{(-4t-9)^2} = \frac{7}{(-4t-9)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-4t-9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $7 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-1		10
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{3}{5}$	$\nearrow$	$-\dfrac{2}{7}$

▶2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 - \dfrac{15}{2}x^2 - 72x + 9$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$g'(x) = 3x^2 - 15x - 72$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-15)^2 - 4 \times 3 \times (-72) = 1\,089$ et $\sqrt{1\,089} = 33$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-15) - \sqrt{1\,089}}{2 \times 3} &= \frac{15 - \sqrt{1\,089}}{6} \\ &= \frac{15 - 33}{6} \\ &= \frac{-18}{6} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-15) + \sqrt{1\,089}}{2 \times 3} &= \frac{15 + \sqrt{1\,089}}{6} \\ &= \frac{15 + 33}{6} \\ &= \frac{48}{6} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$\frac{5-\sqrt{71}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{71}}{2}$		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		$\frac{5-\sqrt{71}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{71}}{2}$		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-1\,021$	$\nearrow$	$-\frac{809}{4}$	$\searrow$	$-\frac{809}{4}$	$\nearrow$	-461

Corrigé de l'exercice 3

▶**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $h(x) = \dfrac{4x+7}{-5x-6}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5x-6=0$.

$$\begin{aligned} -5x-6 &= 0 \\ -5x &= 6 \\ x &= \frac{6}{-5} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{6}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$.

$$h'(x) = \frac{4 \times (-5x-6) - (4x+7) \times (-5)}{(-5x-6)^2} = \frac{11}{(-5x-6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-5x-6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $11 > 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) > 0$.

x	0		10
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\frac{7}{6}$	$\nearrow$	$-\frac{47}{56}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times 3} &= \frac{-6-\sqrt{144}}{6}\\ &= \frac{-6-12}{6}\\ &= \frac{-18}{6}\\ &= -3\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times 3} &= \frac{-6+\sqrt{144}}{6}\\ &= \frac{-6+12}{6}\\ &= \frac{6}{6}\\ &= 1\end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-3		1		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-3		1		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	-607	$\nearrow$	30	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$1\,213$

Corrigé de l'exercice 4

►**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $g(x) = \dfrac{2x-9}{5x-2}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x - 2 = 0$.

$$\begin{aligned}5x-2 &= 0\\ 5x &= 2\\ x &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Or $\frac{2}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ -1]$.

$$g'(x) = \frac{2\times(5x-2)-(2x-9)\times 5}{(5x-2)^2} = \frac{41}{(5x-2)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(5x-2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $41 > 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) > 0$.

x	-10		-1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\frac{29}{52}$	$\nearrow$	$\frac{11}{7}$

►**2.** Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 144x + 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 + 12x - 144$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 12^2 - 4 \times 6 \times (-144) = 3\,600$ et $\sqrt{3\,600} = 60$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-12-\sqrt{3\,600}}{2\times 6} &= \frac{-12-\sqrt{3\,600}}{12}\\ &= \frac{-12-60}{12}\\ &= \frac{-72}{12}\\ &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-12+\sqrt{3\,600}}{2\times 6} &= \frac{-12+\sqrt{3\,600}}{12}\\ &= \frac{-12+60}{12}\\ &= \frac{48}{12}\\ &= 4\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 4$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		4		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-6		4		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	48	↗	656	↘	-344	↗	$1\,168$

Corrigé de l'exercice 5

►**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{-t-2}{2t+4}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t + 4 = 0$.

$$\begin{aligned}2t+4&=0\\ 2t&=-4\\ t&=\frac{-4}{2}\\ t&=-2\end{aligned}$$

Or -2 n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$g'(t) = \frac{(-11)\times(2t+4)-(-t-2)\times 2}{(2t+4)^2} = \frac{0}{(2t+4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(2t+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $0 > 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) > 0$.

t	-1	10
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$ ↗	$-\frac{1}{2}$

▶2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 + 12x^2 - 27x - 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$k'(x) = 3x^2 + 24x - 27$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 24^2 - 4 \times 3 \times (-27) = 900$ et $\sqrt{900} = 30$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-24-\sqrt{900}}{2\times 3} &= \frac{-24-\sqrt{900}}{6}\\ &= \frac{-24-30}{6}\\ &= \frac{-54}{6}\\ &= -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-24+\sqrt{900}}{2\times 3} &= \frac{-24+\sqrt{900}}{6}\\ &= \frac{-24+30}{6}\\ &= \frac{6}{6}\\ &= 1\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-9		1		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		-9		1		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	462	↗	478	↘	-22	↗	$1\,922$