Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 2\,x - 2$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$$
$$\Delta = 4 - (-8)$$
$$\Delta = 12$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(1 + \sqrt{3}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{1 - \sqrt{3}}$ et $\boxed{1 + \sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 16\,x^2 - 9 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2 - \sqrt{9}^2 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x + \sqrt{9}\right) \times \left(\sqrt{16}\,x - \sqrt{9}\right) \\ &= (4\,x + 3) \times (4\,x - 3) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-3}{4}}$ et $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 9\,x^2 - 36\,x + 36 \\ &= (3\,x)^2 - 2 \times 3\,x \times 6 + 6^2 \\ &= (3\,x - 6)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{2}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -2\,x^2 - 5$

$P(x) \leqslant -5$ car un carré est toujours positif.

$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$$\begin{aligned} R(x) &= 25\,x^2 + 20\,x + 4 \\ &= (5\,x)^2 + 2 \times 5\,x \times 2 + 2^2 \\ &= (5\,x + 2)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-2}{5}}$

$Q(x) = -x^2 + 14\,x - 1$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 14$ et $c = -1$:

$$\Delta = 14^2 - 4 \times (-1) \times (-1)$$
$$\Delta = 196 - 4$$
$$\Delta = 192$$

$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{192}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{192}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{64} \times \sqrt{3}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{64} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(7 + 4\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(7 - 4\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 7 + 4\sqrt{3} \qquad x_2 = 7 - 4\sqrt{3}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{7 + 4\sqrt{3}}$ et $\boxed{7 - 4\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 36\,x^2 - 1 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{1}^2 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{1}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{1}\right) \\ &= (6\,x + 1) \times (6\,x - 1) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{6}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 64\,x^2 - 48\,x + 9 \\ &= (8\,x)^2 - 2 \times 8\,x \times 3 + 3^2 \\ &= (8\,x - 3)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

$Q(x) = -x^2 + 6x + 3$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = 3$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times 3$
$\Delta = 36 - (-12)$
$\Delta = 48$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{48}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{48}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(3 + 2\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(3 - 2\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 3 + 2\sqrt{3} \qquad x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{3 + 2\sqrt{3}}$ et $\boxed{3 - 2\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 3x^2 - 3x$
$= -3x \times (-x + 1)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{1}$

$Q(x) = -6x^2 + 6$
$= \sqrt{6}^2 - \left(\sqrt{6}\,x\right)^2$
$= \left(\sqrt{6} + \sqrt{6}\,x\right) \times \left(\sqrt{6} - \sqrt{6}\,x\right)$
$= \left(\sqrt{6}\,x + \sqrt{6}\right) \times \left(-\sqrt{6}\,x + \sqrt{6}\right)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}$

$R(x) = -x^2 + 10x - 7$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = -7$:

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-7)$
$\Delta = 100 - 28$
$\Delta = 72$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{72}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(5 + 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(5 - 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 5 + 3\sqrt{2} \qquad x_2 = 5 - 3\sqrt{2}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{5 + 3\sqrt{2}}$ et $\boxed{5 - 3\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :
$P(x) = x^2 - 16x - 8$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = -16$ et $c = -8$:

$\Delta = (-16)^2 - 4 \times 1 \times (-8)$
$\Delta = 256 - (-32)$
$\Delta = 288$

$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{288}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{16 + \sqrt{288}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{16 + \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(8 - 6\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(8 + 6\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = 8 - 6\sqrt{2} \qquad x_2 = 8 + 6\sqrt{2}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{8 - 6\sqrt{2}}$ et $\boxed{8 + 6\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 25x^2 - 10x + 1 \\ &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 1 + 1^2 \\ &= (5x-1)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -4x^2 + 3 \\ &= \sqrt{3}^2 - \left(\sqrt{4}\,x\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3} + \sqrt{4}\,x\right) \times \left(\sqrt{3} - \sqrt{4}\,x\right) \\ &= \left(2x + \sqrt{3}\right) \times \left(\sqrt{3} - 2x\right) \\ &= \left(2x + \sqrt{3}\right) \times \left(-2x + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 - 8x + 9$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = -8$ et $c = 9$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-8)^2 - 4 \times (-1) \times 9 \\ \Delta &= 64 - (-36) \\ \Delta &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8 - \sqrt{100}}{2 \times (-1)} \\ x_1 &= \frac{8 - 10}{-2} \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{8 + \sqrt{100}}{2 \times (-1)} \\ x_2 &= \frac{8 + 10}{-2} \\ x_2 &= \frac{-9 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \\ x_2 &= -9 \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{-9}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 36x^2 - 4 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{4}\right) \\ &= (6x+2) \times (6x-2) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 36x^2 + 36x + 9 \\ &= (6x)^2 + 2 \times 6x \times 3 + 3^2 \\ &= (6x+3)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-1}{2}}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 25x^2 - 81 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x\right)^2 - \sqrt{81}^2 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x + \sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{25}\,x - \sqrt{81}\right) \\ &= (5x+9) \times (5x-9) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-9}{5}}$ et $\boxed{\dfrac{9}{5}}$

$R(x) = 5x^2 + 3$
$R(x) \geqslant 3$ car un carré est toujours positif.
$R(x)$ n'a donc pas de racine.

$Q(x) = x^2 - 6x + 5$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 5$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 \\ \Delta &= 36 - 20 \\ \Delta &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6 - \sqrt{16}}{2 \times 1} \\ x_1 &= \frac{6 - 4}{2} \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{6 + \sqrt{16}}{2 \times 1} \\ x_2 &= \frac{6 + 4}{2} \\ x_2 &= \frac{5 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{5}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 - 10\,x - 9$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = -10$ et $c = -9$:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-1) \times (-9)$$
$$\Delta = 100 - 36$$
$$\Delta = 64$$

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{10 - 8}{-2} \qquad x_2 = \frac{10 + 8}{-2}$$
$$x_1 = \frac{-1 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{-9 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -9$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{-9}$

$$Q(x) = 2\,x^2 + x$$
$$= x \times (2\,x + 1)$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\frac{-1}{2}}$

$R(x) = -2\,x^2 - 9$

$R(x) \leqslant -9$ car un carré est toujours positif.

$R(x)$ n'a donc pas de racine.