Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 16x^2 - 40x + 25 \\ &= (4x)^2 - 2\times 4x \times 5 + 5^2 \\ &= (4x-5)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{\dfrac{5}{4}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 9x^2 - 16 \\ &= \left(\sqrt{9}\,x\right)^2 - \sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{9}\,x + \sqrt{16}\right) \times \left(\sqrt{9}\,x - \sqrt{16}\right) \\ &= (3x+4)\times(3x-4) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-4}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

$R(x) = -x^2 - 18x - 9$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = -18$ et $c = -9$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-18)^2 - 4\times(-1)\times(-9) \\ \Delta &= 324 - 36 \\ \Delta &= 288 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{18 - \sqrt{288}}{2\times(-1)} \qquad x_2 = \frac{18 + \sqrt{288}}{2\times(-1)}$$

$$x_1 = \frac{18 - \sqrt{144}\times\sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{18 + \sqrt{144}\times\sqrt{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{\left(-9 + 6\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(-9 - 6\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$

$$x_1 = -9 + 6\sqrt{2} \qquad x_2 = -9 - 6\sqrt{2}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-9+6\sqrt{2}}$ et $\boxed{-9-6\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 + 4$
$P(x) \geqslant 4$ car un carré est toujours positif.
$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$$\begin{aligned} R(x) &= -5x^2 + 6x \\ &= x \times (-5x + 6) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

$Q(x) = -x^2 + 4x + 5$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4\times(-1)\times 5 \\ \Delta &= 16 - (-20) \\ \Delta &= 36 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2\times(-1)} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2\times(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 6}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 + 6}{-2}$$

$$x_1 = \frac{5\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{-1\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -1$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{5}$ et $\boxed{-1}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 64x^2 - 9 \\ &= \left(\sqrt{64}\,x\right)^2 - \sqrt{9}^2 \\ &= \left(\sqrt{64}\,x + \sqrt{9}\right) \times \left(\sqrt{64}\,x - \sqrt{9}\right) \\ &= (8x+3)\times(8x-3) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-3}{8}}$ et $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 49x^2 - 98x + 49 \\ &= (7x)^2 - 2\times 7x \times 7 + 7^2 \\ &= (7x-7)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{1}$

$R(x) = -x^2 + 6x + 9$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = 9$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times 9$
$\Delta = 36 - (-36)$
$\Delta = 72$

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(3 + 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = 3 + 3\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(3 - 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = 3 - 3\sqrt{2}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{3 + 3\sqrt{2}}$ et $\boxed{3 - 3\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 49x^2 - 4 \\ &= \left(\sqrt{49}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2 \\ &= \left(\sqrt{49}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{49}\,x - \sqrt{4}\right) \\ &= (7x + 2) \times (7x - 2) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2}{7}}$ et $\boxed{\dfrac{2}{7}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 5x^2 - 8 \\ &= \left(\sqrt{5}\,x\right)^2 - \sqrt{8}^2 \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + \sqrt{8}\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - \sqrt{8}\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - 2\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + 2\sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - 2\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$ et $\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$

$Q(x) = -x^2 - 6x + 7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = -6$ et $c = 7$:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times 7$
$\Delta = 36 - (-28)$
$\Delta = 64$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{6 - 8}{-2}$
$x_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{6 + 8}{-2}$
$x_2 = \dfrac{-7 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = -7$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{-7}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 9x^2 + 54x + 81 \\ &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 9 + 9^2 \\ &= (3x + 9)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{-3}$

$R(x) = 5x^2 + 6$
$R(x) \geqslant 6$ car un carré est toujours positif.
$R(x)$ n'a donc pas de racine.

$Q(x) = -x^2 - 6x - 5$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = -6$ et $c = -5$:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-5)$
$\Delta = 36 - 20$
$\Delta = 16$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{6 - 4}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-1 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = -1$

$x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{6 + 4}{-2}$
$x_2 = \dfrac{-5 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = -5$

Les racines de $Q\,(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{-5}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P\,(x) &= 5\,x^2 - 8 \\ &= \left(\sqrt{5}\,x\right)^2 - \sqrt{8}^2 \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + \sqrt{8}\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - \sqrt{8}\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - 2\,\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x + 2\,\sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{5}\,x - 2\,\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P\,(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2\,\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$ et $\boxed{\dfrac{2\,\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$

$$\begin{aligned} Q\,(x) &= 16\,x^2 - 49 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2 - \sqrt{49}^2 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x + \sqrt{49}\right) \times \left(\sqrt{16}\,x - \sqrt{49}\right) \\ &= (4\,x + 7) \times (4\,x - 7) \end{aligned}$$

Les racines de $Q\,(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-7}{4}}$ et $\boxed{\dfrac{7}{4}}$

$R\,(x) = -x^2 + 6\,x - 5$ On calcule le discriminant de $R\,(x)$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -5$:

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-5)$$
$$\Delta = 36 - 20$$
$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-6 - 4}{-2}$$
$$x_1 = \frac{5 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)}$$
$$x_2 = \frac{-6 + 4}{-2}$$
$$x_2 = 1$$

Les racines de $R\,(x)$ sont $\boxed{5}$ et $\boxed{1}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$P\,(x) = x^2 + 6\,x - 7$ On calcule le discriminant de $P\,(x)$ avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = -7$:

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-7)$$
$$\Delta = 36 - (-28)$$
$$\Delta = 64$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{-6 - 8}{2}$$
$$x_1 = \frac{-7 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = -7$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times 1}$$
$$x_2 = \frac{-6 + 8}{2}$$
$$x_2 = 1$$

Les racines de $P\,(x)$ sont $\boxed{-7}$ et $\boxed{1}$

$Q\,(x) = 4\,x^2 + 1$
$Q\,(x) \geqslant 1$ car un carré est toujours positif.
$Q\,(x)$ n'a donc pas de racine.

$$\begin{aligned} R\,(x) &= 16\,x^2 - 40\,x + 25 \\ &= (4\,x)^2 - 2 \times 4\,x \times 5 + 5^2 \\ &= (4\,x - 5)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R\,(x)$ est $\boxed{\dfrac{5}{4}}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P\,(x) = x^2 + 4\,x - 5$ On calcule le discriminant de $P\,(x)$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = -5$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5)$
$\Delta = 16 - (-20)$
$\Delta = 36$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{36}}{2\times 1}$
$x_1 = \dfrac{-4-6}{2}$
$x_1 = \dfrac{-5\times \cancel{2}}{1\times \cancel{2}}$
$x_1 = -5$

$x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{36}}{2\times 1}$
$x_2 = \dfrac{-4+6}{2}$
$x_2 = 1$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-5}$ et $\boxed{1}$

$Q(x) = -2\,x^2 - 9\,x$
$= -x \times (2\,x + 9)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-9}{2}}$

$R(x) = 16\,x^2 - 16\,x + 4$
$= (4\,x)^2 - 2 \times 4\,x \times 2 + 2^2$
$= (4\,x - 2)^2$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{1}{2}}$