Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 7x^2-8 \\ &= \left(\sqrt{7}\,x\right)^2-\sqrt{8}^2 \\ &= \left(\sqrt{7}\,x+\sqrt{8}\right)\times\left(\sqrt{7}\,x-\sqrt{8}\right) \\ &= \left(\sqrt{7}\,x+\left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right)\times\left(\sqrt{7}\,x-\left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{7}\,x+\left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right)\times\left(\sqrt{7}\,x-2\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{7}\,x+2\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{7}\,x-2\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}$ et $\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2+3x \\ &= x\times(x+3) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{-3}$

$R(x)=x^2+2x-2$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a=1$, $b=2$ et $c=-2$:

$$\Delta = 2^2-4\times1\times(-2)$$
$$\Delta = 4-(-8)$$
$$\Delta = 12$$

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{12}}{2\times1} \qquad x_2=\frac{-2+\sqrt{12}}{2\times1}$$
$$x_1=\frac{-2-\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{2} \qquad x_2=\frac{-2+\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{2}$$
$$x_1=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}} \qquad x_2=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$
$$x_1=-1-\sqrt{3} \qquad x_2=-1+\sqrt{3}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-1-\sqrt{3}}$ et $\boxed{-1+\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 49x^2+28x+4 \\ &= (7x)^2+2\times7x\times2+2^2 \\ &= (7x+2)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{\dfrac{-2}{7}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^2-16 \\ &= \left(\sqrt{4}\,x\right)^2-\sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{4}\,x+\sqrt{16}\right)\times\left(\sqrt{4}\,x-\sqrt{16}\right) \\ &= (2x+4)\times(2x-4) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-2}$ et $\boxed{2}$

$R(x)=-x^2-2x+2$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a=-1$, $b=-2$ et $c=2$:

$$\Delta = (-2)^2-4\times(-1)\times2$$
$$\Delta = 4-(-8)$$
$$\Delta = 12$$

$$x_1=\frac{2-\sqrt{12}}{2\times(-1)} \qquad x_2=\frac{2+\sqrt{12}}{2\times(-1)}$$
$$x_1=\frac{2-\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{-2} \qquad x_2=\frac{2+\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$
$$x_1=-1+\sqrt{3} \qquad x_2=-1-\sqrt{3}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-1+\sqrt{3}}$ et $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x)=-x^2+4x+5$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a=-1$, $b=4$ et $c=5$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5$

$\Delta = 16 - (-20)$

$\Delta = 36$

$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times (-1)}$

$x_1 = \dfrac{-4 - 6}{-2}$

$x_1 = \dfrac{5 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$

$x_1 = 5$

$x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times (-1)}$

$x_2 = \dfrac{-4 + 6}{-2}$

$x_2 = \dfrac{-1 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$

$x_2 = -1$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{5}$ et $\boxed{-1}$

$Q(x) = x^2 - 10x + 25$
$= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$
$= (x-5)^2$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{5}$

$R(x) = -2x^2 - 8x$
$= -2x \times (x+4)$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{-4}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 6x^2 + 4$

$P(x) \geqslant 4$ car un carré est toujours positif.

$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$Q(x) = 16x^2 + 72x + 81$
$= (4x)^2 + 2 \times 4x \times 9 + 9^2$
$= (4x+9)^2$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{-9}{4}}$

$R(x) = -x^2 - 8x + 2$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = -8$ et $c = 2$:

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-1) \times 2$

$\Delta = 64 - (-8)$

$\Delta = 72$

$x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$

$x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$

$x_1 = \dfrac{\left(-4 + 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$

$x_1 = -4 + 3\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$

$x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$

$x_2 = \dfrac{\left(-4 - 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$

$x_2 = -4 - 3\sqrt{2}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-4 + 3\sqrt{2}}$ et $\boxed{-4 - 3\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 64x^2 - 64$
$= \left(\sqrt{64}\,x\right)^2 - \sqrt{64}^2$
$= \left(\sqrt{64}\,x + \sqrt{64}\right) \times \left(\sqrt{64}\,x - \sqrt{64}\right)$
$= (8x+8) \times (8x-8)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{1}$

$Q(x) = -x^2 + 2$
$= \sqrt{2}^2 - x^2$
$= \left(\sqrt{2} + x\right) \times \left(\sqrt{2} - x\right)$
$= \left(x + \sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{2} - x\right)$
$= \left(x + \sqrt{2}\right) \times \left(-x + \sqrt{2}\right)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-\sqrt{2}}$ et $\boxed{\sqrt{2}}$

$R(x) = -x^2 - 16x + 8$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = -16$ et $c = 8$:

$\Delta = (-16)^2 - 4 \times (-1) \times 8$
$\Delta = 256 - (-32)$
$\Delta = 288$

$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{288}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{16 + \sqrt{288}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{16 + \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-8 + 6\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(-8 - 6\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = -8 + 6\sqrt{2} \qquad x_2 = -8 - 6\sqrt{2}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-8 + 6\sqrt{2}}$ et $\boxed{-8 - 6\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 25x^2 - 80x + 64 \\ &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 8 + 8^2 \\ &= (5x - 8)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{\dfrac{8}{5}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 36 \\ &= x^2 - \sqrt{36}^2 \\ &= \left(x + \sqrt{36}\right) \times \left(x - \sqrt{36}\right) \\ &= (x + 6) \times (x - 6) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-6}$ et $\boxed{6}$

$R(x) = -x^2 + 18x - 6$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = 18$ et $c = -6$:

$\Delta = 18^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$
$\Delta = 324 - 24$
$\Delta = 300$

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{300}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-18 + \sqrt{300}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{100} \times \sqrt{3}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-18 + \sqrt{100} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(9 + 5\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(9 - 5\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 9 + 5\sqrt{3} \qquad x_2 = 9 - 5\sqrt{3}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{9 + 5\sqrt{3}}$ et $\boxed{9 - 5\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 81x^2 - 16 \\ &= \left(\sqrt{81}\,x\right)^2 - \sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{81}\,x + \sqrt{16}\right) \times \left(\sqrt{81}\,x - \sqrt{16}\right) \\ &= (9x + 4) \times (9x - 4) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-4}{9}}$ et $\boxed{\dfrac{4}{9}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 8x^2 - 5x \\ &= -x \times (-8x + 5) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

$Q(x) = x^2 + 4x - 4$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = -4$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-4)$
$\Delta = 16 - (-16)$
$\Delta = 32$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{32}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-2 - 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(-2 + 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = -2 - 2\sqrt{2} \qquad x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$$

Les racines de $Q\left(x\right)$ sont $\boxed{-2-2\sqrt{2}}$ et $\boxed{-2+2\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P\left(x\right)=x^2+6\,x+4$ On calcule le discriminant de $P\left(x\right)$ avec $a=1$, $b=6$ et $c=4$:

$$\Delta=6^2-4\times1\times4$$
$$\Delta=36-16$$
$$\Delta=20$$

$$x_1=\frac{-6-\sqrt{20}}{2\times1} \qquad x_2=\frac{-6+\sqrt{20}}{2\times1}$$
$$x_1=\frac{-6-\sqrt{4}\times\sqrt{5}}{2} \qquad x_2=\frac{-6+\sqrt{4}\times\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1=\frac{\left(-3-\sqrt{5}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}} \qquad x_2=\frac{\left(-3+\sqrt{5}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$
$$x_1=-3-\sqrt{5} \qquad x_2=-3+\sqrt{5}$$

Les racines de $P\left(x\right)$ sont $\boxed{-3-\sqrt{5}}$ et $\boxed{-3+\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}Q\left(x\right)&=64\,x^2-81\\&=\left(\sqrt{64}\,x\right)^2-\sqrt{81}^2\\&=\left(\sqrt{64}\,x+\sqrt{81}\right)\times\left(\sqrt{64}\,x-\sqrt{81}\right)\\&=\left(8\,x+9\right)\times\left(8\,x-9\right)\end{aligned}$$

Les racines de $Q\left(x\right)$ sont $\boxed{\frac{-9}{8}}$ et $\boxed{\frac{9}{8}}$

$R\left(x\right)=-3\,x^2-8$

$R\left(x\right)\leqslant-8$ car un carré est toujours positif.

$R\left(x\right)$ n'a donc pas de racine.