Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 6\,x^2 - 8 \\ &= \left(\sqrt{6}\,x\right)^2 - \sqrt{8}^2 \\ &= \left(\sqrt{6}\,x + \sqrt{8}\right) \times \left(\sqrt{6}\,x - \sqrt{8}\right) \\ &= \left(\sqrt{6}\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{6}\,x - \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{6}\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{6}\,x - 2\,\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{6}\,x + 2\,\sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{6}\,x - 2\,\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2\,\sqrt{2}}{\sqrt{6}}}$ et $\boxed{\dfrac{2\,\sqrt{2}}{\sqrt{6}}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -6\,x^2 + 2\,x \\ &= 2\,x \times (-3\,x + 1) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

$Q(x) = x^2 - 6\,x + 4$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 4$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 4$$
$$\Delta = 36 - 16$$
$$\Delta = 20$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{20}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{20}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(3 + \sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = 3 - \sqrt{5} \qquad x_2 = 3 + \sqrt{5}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{3 - \sqrt{5}}$ et $\boxed{3 + \sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 6\,x - 9$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = -9$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9)$$
$$\Delta = 36 - (-36)$$
$$\Delta = 72$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{72}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{72}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(3 - 3\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(3 + 3\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = 3 - 3\,\sqrt{2} \qquad x_2 = 3 + 3\,\sqrt{2}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{3 - 3\,\sqrt{2}}$ et $\boxed{3 + 3\,\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 64\,x^2 + 96\,x + 36 \\ &= (8\,x)^2 + 2 \times 8\,x \times 6 + 6^2 \\ &= (8\,x + 6)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{-3}{4}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -4\,x^2 + 7\,x \\ &= x \times (-4\,x + 7) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{7}{4}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned}P(x) &= 4x^2 - 4\\ &= \left(\sqrt{4}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2\\ &= \left(\sqrt{4}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{4}\,x - \sqrt{4}\right)\\ &= (2x+2) \times (2x-2)\end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{1}$

$$\begin{aligned}R(x) &= 4x^2 + 4x + 1\\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2\\ &= (2x+1)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-1}{2}}$

$Q(x) = x^2 + 2x - 3$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$:

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3)$
$\Delta = 4 - (-12)$
$\Delta = 16$

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{-2 - 4}{2}$
$x_1 = \dfrac{-3 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -3$

$x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{-2 + 4}{2}$
$x_2 = 1$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-3}$ et $\boxed{1}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 7x^2 + 4$
$P(x) \geqslant 4$ car un carré est toujours positif.
$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$$\begin{aligned}Q(x) &= 64x^2 + 112x + 49\\ &= (8x)^2 + 2 \times 8x \times 7 + 7^2\\ &= (8x+7)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{-7}{8}}$

$R(x) = x^2 - 6x - 7$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = -7$:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7)$
$\Delta = 36 - (-28)$
$\Delta = 64$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{64}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{6 - 8}{2}$
$x_1 = \dfrac{-1 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -1$

$x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{64}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{6 + 8}{2}$
$x_2 = \dfrac{7 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = 7$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{7}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -2x^2 - 9$
$P(x) \leqslant -9$ car un carré est toujours positif.
$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$$\begin{aligned}R(x) &= 16x^2 + 72x + 81\\ &= (4x)^2 + 2 \times 4x \times 9 + 9^2\\ &= (4x+9)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-9}{4}}$

$Q(x) = -x^2 + 6x - 7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -7$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-7)$
$\Delta = 36 - 28$
$\Delta = 8$

$x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{8}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{4} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = 3+\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{8}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{4} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(3-\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = 3-\sqrt{2}$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{3+\sqrt{2}}$ et $\boxed{3-\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :
$P(x) = -x^2 + 4x + 4$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = 4$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 4$
$\Delta = 16 - (-16)$
$\Delta = 32$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{32}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{16} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(2+2\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = 2+2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{32}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{16} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(2-2\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = 2-2\sqrt{2}$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{2+2\sqrt{2}}$ et $\boxed{2-2\sqrt{2}}$

$Q(x) = 6x^2 + 7$
$Q(x) \geqslant 7$ car un carré est toujours positif.
$Q(x)$ n'a donc pas de racine.

$R(x) = x^2 - 8x + 16$
$= x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$
$= (x-4)^2$
L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{4}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 5x^2 - 3x$
$= -x \times (-5x + 3)$
Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

$Q(x) = 49x^2 - 4$
$= \left(\sqrt{49}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2$
$= \left(\sqrt{49}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{49}\,x - \sqrt{4}\right)$
$= (7x + 2) \times (7x - 2)$
Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2}{7}}$ et $\boxed{\dfrac{2}{7}}$

$R(x) = x^2 + 4x + 3$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3$
$\Delta = 16 - 12$
$\Delta = 4$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{-4-2}{2}$
$x_1 = \dfrac{-3 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -3$

$x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{-4+2}{2}$
$x_2 = \dfrac{-1 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = -1$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-3}$ et $\boxed{-1}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 - 2\,x + 3$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = -2$ et $c = 3$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3$$
$$\Delta = 4 - (-12)$$
$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{2 - 4}{-2}$$
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)}$$
$$x_2 = \frac{2 + 4}{-2}$$
$$x_2 = \frac{-3 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_2 = -3$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{-3}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 14\,x + 49 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 \\ &= (x - 7)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{7}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 36\,x^2 - 4 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{4}\right) \\ &= (6\,x + 2) \times (6\,x - 2) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\frac{-1}{3}}$ et $\boxed{\frac{1}{3}}$