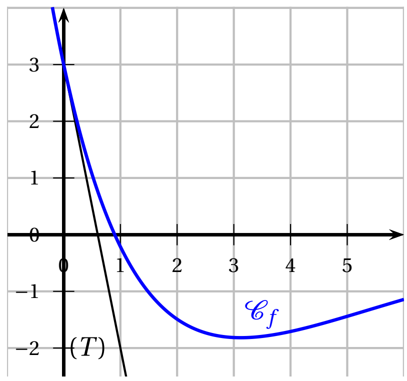
Corrigé du baccalauréat Première Amérique du Nord série générale e3c n° 1 – 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

Exercice 1 **5 points**

1.	Pour tout réel x, $\text{e}^{2x}+\text{e}^{4x}$ est égal à			
	a. e^{6x}	**b.** $\text{e}^{2x}\left(1+\text{e}^{2}\right)$	**c.** $\text{e}^{3x}\left(\text{e}^{x}+\text{e}^{-x}\right)$	**d.** e^{8x^2}
2.	Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(-5\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(4\,;\,10)$ et la droite (d) d'équation : $5x+2y+3=0$.			
	a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	**b.** $\vec{u}$ est un vecteur normal à la droite (d)	**c.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	**d.** $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d)
3.	La dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)\text{e}^{-x}$ est :			
	a. $2x\text{e}^{-x}$	**b.** -2e^{-x}	**c.** $(-2x+3)\text{e}^{-x}$	**d.** $2\text{e}^{-x}+(2x-1)\text{e}^{-x}$
4.	Pour tout réel x, on a $\sin(\pi+x)=$			
	a. $-\sin(x)$	**b.** $\cos(x)$	**c.** $\sin(x)$	**d.** $-\cos(x)$
5.	Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre. La tangente à la courbe au point A est la droite T.			
	a. $f'(0)=3$	**b.** $f'(0)=\dfrac{1}{5}$	**c.** $f'(0)=5$	**d.** $f'(0)=-5$

Solutions

1. c.
$\text{e}^{3x}\left(\text{e}^{x}+\text{e}^{-x}\right)=\text{e}^{4x}+\text{e}^{2x}$

2. c.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=-4\times5+2\times10=-20+20=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$

3. c.
$f(x)=(2x-1)\text{e}^{-x}$ donc $f'(x)=2\times\text{e}^{-x}+(2x-1)\times(-1)\text{e}^{-x}=(2-2x+1)\text{e}^{-x}=(-2x+3)\text{e}^{-x}$

4. a.
Les points correspondant à x et $\pi+x$ sur le cercle trigonométrique sont diamétralement opposés donc $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$.

5. d.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T qui passe par les points de coordonnées $(0\,,\,3)$ et $(1\,,\,-2)$; donc $f'(0)=\dfrac{-2-3}{1-0}=-5$.

Exercice 2 **5 points**

La population d'une ville A augmente chaque année de 2 %. La ville A avait 4 600 habitants en 2010. La population d'une ville B augmente de 110 habitants par année. La ville B avait 5 100 habitants en 2010.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de la ville A et v_n le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année $2010 + n$.

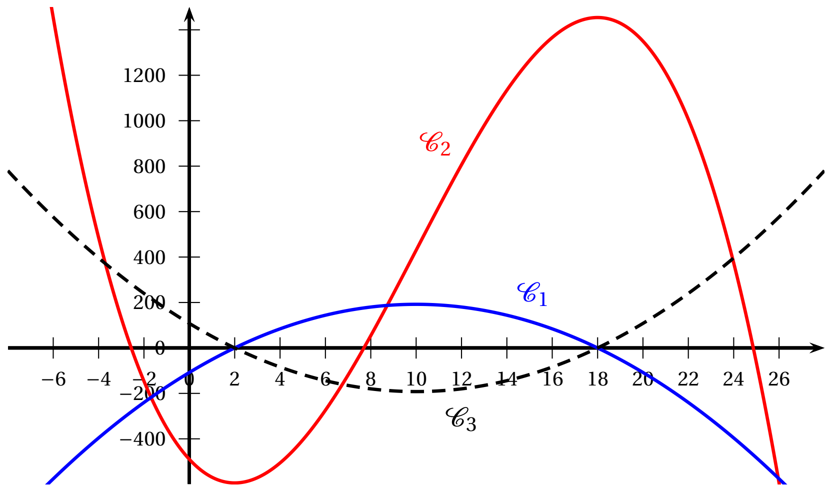
1. À la fin de 2011 :
   - Le nombre d'habitants de la ville A est :
     $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{2}{100} = 4\,600 + 4\,600 \times \dfrac{2}{100} = 4\,692$.
   - Le nombre d'habitants de la ville B est : $v_1 = v_0 + 110 = 5\,100 + 110 = 5\,210$.
2.
   - Ajouter 2 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2}{100} = 1,02$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_0 = 4\,600$.
   - On passe de v_n à v_{n+1} en ajoutant 110, donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 110$ et de premier terme $v_0 = 5\,100$.
3. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_0 = 4\,600$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 4\,600 \times 1,02^n$.
   Le nombre d'habitants dans la ville A en 2020 est : $u_{10} = 4\,600 \times 1,02^{10} \approx 5\,607$.
4. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 110$ et de premier terme $v_0 = 5\,100$ donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + n \times r = 5\,100 + 110n$.
   Le nombre d'habitants dans la ville B en 2020 est : $v_{10} = 5\,100 + 110 \times 10 = 6\,200$.
5. On complète l'algorithme ci-dessous qui permet de déterminer au bout de combien d'années la population de la ville A dépasse celle de la ville B.

```
def année () :
    u = 4600
    v = 5100
    n = 0
    while u ⩽ v
        u = u × 1,02
        u = v + 110
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 3 **5 points**

Soit h la fonction définie sur $[0 ; 26]$ par $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

1. $h'(x) = -3x^2 + 30 \times 2x - 108 = -3x^2 + 60x - 108$
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathscr{C}'$ celle de h'.
   a. La courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction h est la courbe $\mathscr{C}_2$.
   La courbe $\mathscr{C}'$ représentant la fonction h' est la courbe $\mathscr{C}_1$.
   b. $h(0) = -490$ donc la courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction h ; on peut donc voir que la fonction h est décroissante, puis croissante, puis décroissante. La fonction dérivée h' sera donc négative, puis positive, puis négative. Elle est donc représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

La droite (T) a pour équation réduite : $y = h'(0)(x-0) + h(0)$.

$h(0) = -490$ et $h'(0) = -108$

La droite (T) a donc pour équation réduite : $y = -108x - 490$.

4. $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$ est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-108) = 2304 = 48^2$

Ce polynôme admet donc deux racines :

$x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-60+48}{-6} = 2$ et $x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-60-48}{-6} = 18$

On en déduit le signe de $h'(x)$ puis le sens de variation de h.

$h(0) = -490$, $h(2) = -594$, $h(18) = 1454$ et $h(26) = -594$

x	0		2		18		26
$h'(x)$		−	0	+	0	−	
$h(x)$	−490	↘	−594	↗	1454	↘	−594

Exercice 4 — 5 points

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A et le site B. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles, le site B l'autre quart.
Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut. Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

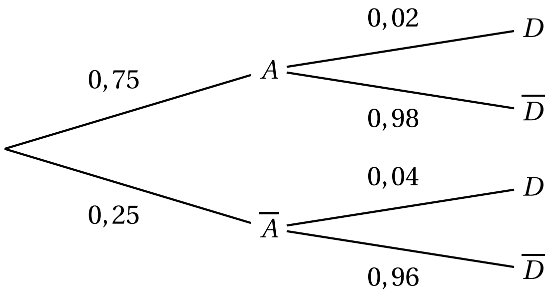
- 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses ;
- 4 % des aiguilles du site B sont défectueuses.

Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les évènements suivants :

- A : l'aiguille provient du site A ;
- B : l'aiguille provient du site B ;
- D : l'aiguille présente un défaut.

L'évènement contraire de D est noté $\overline{D}$.

1. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles donc $P(A) = 0,75$.
2. On complète l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. La probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A est :
$P(A \cap D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
4. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right) = 0,75 \times 0,02 + 0,25 \times 0,04 = 0,025$.
5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
La probabilité qu'elle ait été produite sur le site A est :
$P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,015}{0,025} = 0,6$.