∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU ∽

Spécialité « Mathématiques » – Sujet 4 – 2021

Classe de première – Corrigé

Exercice 1 — 5 points

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x}$.
La fonction dérivée f' de f est donnée sur $\mathbf{R}$ par :

a. $f'(x) = \mathrm{e}^{x}$	**b.** $f'(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{x}$	**c.** $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{x}$	**d.** $f'(0) = 0$

> **Réponse b.**

Question 2

Pour tous réels a et b, le nombre $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{-b}}$ est égal à :

a. e^{a-b}	**b.** $\mathrm{e}^{\frac{a}{-b}}$	**c.** $\dfrac{\mathrm{e}^{b}}{\mathrm{e}^{-a}}$	**d.** $\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-b}$

> $\mathrm{e}^{a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-a}}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-b}} = \mathrm{e}^{b}$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{-b}} = \dfrac{\mathrm{e}^{b}}{\mathrm{e}^{-a}}$
> **Réponse c.**

Question 3

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = \dfrac{9}{2}$ et $u_6 = 3$.
Alors le premier terme u_0 et la raison R de la suite sont :

a. $u_0 = 6$ et $R = -\dfrac{1}{2}$	**b.** $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $R = 6$
c. $u_0 = 6$ et $R = \dfrac{1}{2}$	**d.** $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $R = \dfrac{1}{2}$

> La suite est arithmétique de raison R donc $u_6 = u_5 + R = u_4 + 2R = u_3 + 3R$.
> On déduit que $3 = \frac{9}{2} + 3R$ donc que $3R = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$ soit $R = -\frac{1}{2}$.
> $u_3 = u_0 + 3R$ donc $u_0 = u_3 - 3R = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$
> **Réponse a.**

Question 4

On considère le programme écrit en langage Python ci-dessous.

```
s = 0
for i in range(51) :
  s = s + i
```

Quelle est la valeur contenue dans la variable s après exécution du programme?

a. 51	**b.** 1 326	**c.** 1 275	**d.** 2 500

« `for i in range(51)` » signifie que `i` prend toutes valeurs entières entre 0 et 50.
La valeur contenue dans la variable `s` après exécution du programme est donc $0+1+2+\cdots+50$, soit la somme des 50 premiers entiers de 1 à 50.
D'après le cours, $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ donc $1+2+\cdots+50=\frac{50\times51}{2}=1275$.
Réponse c.

Question 5

La valeur exacte de la somme $S=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$ est :

a. 1,750 030 518	**b.** $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$	**c.** $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$	**d.** 1,999 969 482

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=\frac{1}{2}$; donc, pour tout n, on a $u_n=u_0\times q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Il s'agit donc de calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_{15}=u_0\times\frac{1-q^{16}}{1-q}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$$

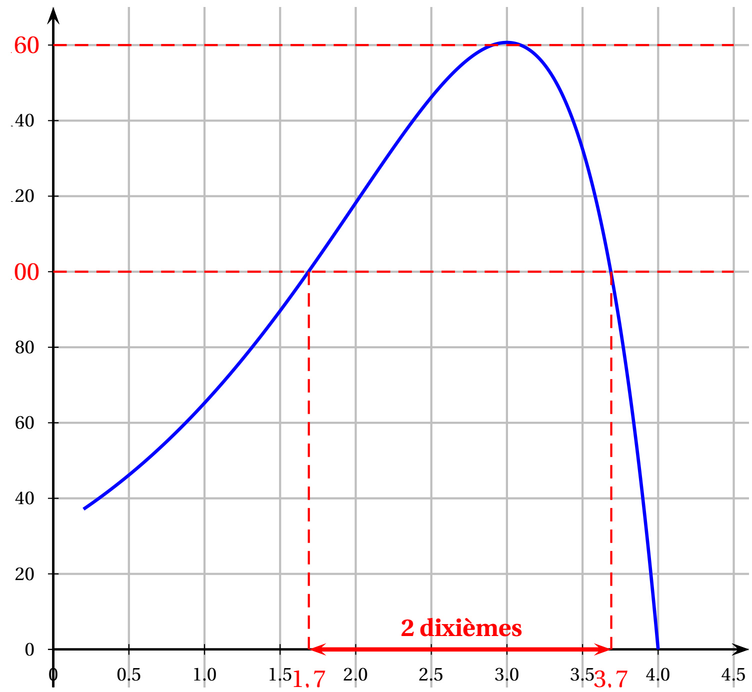
Réponse b.

Exercice 2 — 5 points

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron. Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique. La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

Partie A : lecture graphique

1. La puissance maximale atteinte par ce rameur est d'environ 160 Watts.
2. La puissance développée reste au-dessus de 100 Watts entre environ 1,7 et 3,7 dixièmes de seconde, soit pendant 2 dixièmes de seconde.



Partie B : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2~;~4]$ par : $f(x) = (-8x+32)\,\mathrm{e}^{x}$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0,2~;~4]$, $f'(x) = (-8x+24)\,\mathrm{e}^{x}$.

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-8x+24)$ qui s'annule et change de signe pour $x = 3$.

x	$0,2$		3		4
$-8x+24$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
		f est croissante		f est décroissante	

2. Le maximum de la fonction f est $f(3) = (-8\times 3+32)\,\mathrm{e}^{3} = 8\,\mathrm{e}^{3}$.
   On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. On cherche combien de mois d'entrainement sont nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W.
   Ajouter 5 %, c'est multiplier par $1+\frac{5}{100} = 1,05$. il faut donc compter le nombre de fois qu'il faut multiplier $8\,\mathrm{e}^{3}$ par $1,05$ pour que le résultat dépasse 200.
   $8\,\mathrm{e}^{3}\times 1,05^{4} \approx 195,3 < 200$ et $8\,\mathrm{e}^{3}\times 1,05^{5} \approx 205,1 > 200$
   Il faudra donc 5 mois d'entraînement pour que le sportif dépasse les 200 W.

Exercice 3 — 5 points

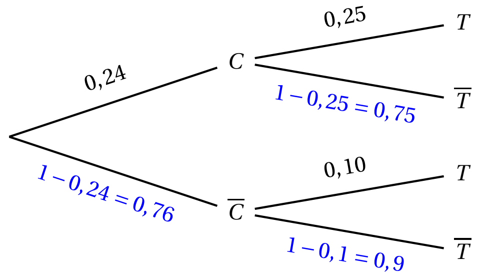
Un magasin commercialise des canapés et des tables de salon.
Quand un client se présente, il achète au plus un canapé et au plus une table de salon. Une étude a montré que :

- la probabilité pour qu'un client achète un canapé est $0,24$;
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il a acheté un canapé est $0,25$;
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il n'achète pas de canapé est $0,1$.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- C l'évènement « le client achète un canapé » et $\overline{C}$ son évènement contraire ;
- T l'évènement « le client achète une table de salon » et $\overline{T}$ son évènement contraire.

1. On construit un arbre pondéré décrivant la situation.



2. La probabilité que le client achète un canapé et une table de salon est :
   $P(C\cap T) = P(C)\times P_{C}(T) = 0,24\times 0,25 = 0,06$.
3. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(C\cap T) + P(\overline{C}\cap T) = 0,06 + 0,76\times 0,1 = 0,136$

4. Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et le prix moyen d'une table de salon est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.

   a. On a quatre possibilités.

   - Aucun achat : $P(X=0) = P\left(\overline{C} \cap \overline{T}\right) = 0,76 \times 0,9 = 0,684$.
   - Achat d'une table et pas de canapé : $P(X=300) = P\left(\overline{C} \cap T\right) = 0,76 \times 0,1 = 0,076$.
   - Achat d'un canapé et pas de table : $P(X=1\,000) = P\left(C \cap \overline{T}\right) = 0,24 \times 0,75 = 0,18$.
   - Achat d'un canapé et d'une table : $P(X=1300) = P(C \cap T) = 0,24 \times 0,25 = 0,06$.

   On complète le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	0	300	1 000	1 300
$P(X=x_i)$	0,684	0,076	0,18	0,06

   b. L'espérance de X est :
   $E(X) = \sum(x_i \times p_i) = 0 \times 0,684 + 300 \times 0,076 + 1000 \times 0,18 + 1300 \times 0,06 = 280,8$.
   Donc la dépense moyenne d'un client entrant dans le magasin est de 280,80 €.

Exercice 4 — 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+3y-5=0$.

1. Soit A le point de coordonnées (2 ; 1).
   $x_{\text{A}} + 3y_{\text{A}} - 5 = 3 \times 2 + 3 \times 1 - 5 = 0$ donc A appartient à la droite $\mathscr{D}$.
   On détermine un 2^e^ point pour tracer la droite $\mathscr{D}$: si $y=0$ alors $x-5=0$ donc $x=5$. La droite passe par le point de coordonnées (5 ; 0).
   On trace la droite dans le repère.
2. Soit $\mathscr{D}'$ la droite passant par le point B (4 ; 2) et perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.
   - Une droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(-b\,;\,a)$ donc le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-3\,;\,1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
   - Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires, donc un vecteur directeur de l'une est un vecteur normal de l'autre ; donc le vecteur $\vec{v}\,(-3\,;\,1)$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}'$.
   - La droite $\mathscr{D}'$ est donc la droite passant par le point B et de vecteur normal $\vec{v}$; c'est donc l'ensemble des points M $(x\,;\,y)$ tels que $\overrightarrow{\text{BM}}$ soit orthogonal à $\vec{v}$.
   - Le vecteur $\overrightarrow{\text{BM}}$ a pour coordonnées $(x-4\,;\,y-2)$.
   $$\overrightarrow{\text{BM}} \perp \vec{v} \iff \overrightarrow{\text{BM}} \cdot \vec{v} = 0 \iff (x-4)(-3) + (y-2)(1) = 0 \iff -3x+12+y-2=0$$
   $$\iff -3x+y+10=0 \iff 3x-y-10=0$$

   La droite $\mathscr{D}'$ a pour équation $3x-y-10=0$.
3. Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite $\mathscr{D}$.
   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires donc le point H est le point d'intersection de ces deux droites ; les coordonnées de H sont donc solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-5 &=& 0\\ 3x-y-10 &=& 0\end{array}\right.$
   On résout ce système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-5 &=& 0\\ 3x-y-10 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3y+5\\ 3(-3y+5)-y-10 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3y+5\\ -10y+5 &=& 0\end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3 \times 0,5+5\\ y &=& 0,5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3,5\\ y &=& 0,5\end{array}\right.$$
   Le point H a pour coordonnées (3,5 ; 0,5).

4. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] et on note Ω son centre.

a.
- Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] a pour centre le point Ω, milieu du segment [AB] ; les coordonnées de Ω sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right) = (3\ ;\ 1,5)$.
- Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] a pour rayon

$$\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$$

Le cercle $\mathscr{C}$ a donc pour équation $(x-3)^2 + (y-1,5)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ c'est-à-dire $(x-3)^2 + (y-1,5)^2 = 1,25$.

b. D'après les questions précédentes, le triangle ABH est rectangle en H donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB], appelé $\mathscr{C}$; donc le point H appartient au cercle $\mathscr{C}$.