ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU

Spécialité « Mathématiques » – Sujet 2 – 2021

Classe de première – Corrigé

Exercice 1 — 5 points

Question 1

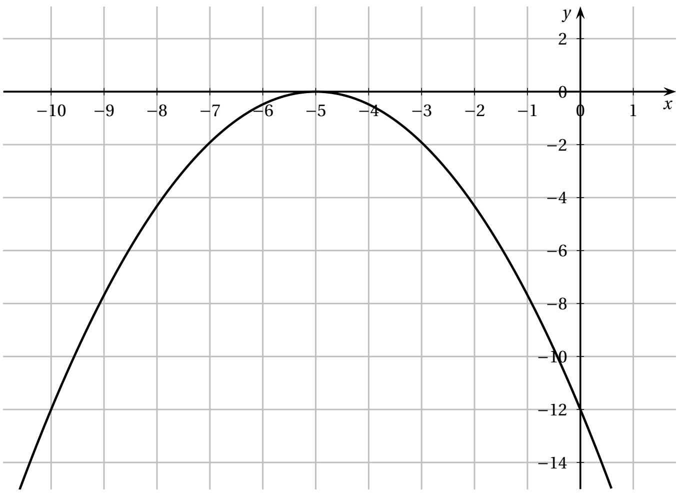
Pour x pièces produites, le coût de fabrication $C(x)$, en milliers d'euros est donné par
$C(x) = 0,01x^3 - 0,135x^2 + 0,6x + 15$, avec $x \in [0 ; 30]$.
Pour 2 pièces produites, le coût de fabrication en euros est :

a. 15,74	**b.** 157,4	**c.** 1574	**d.** 15740

$C(2) = 0,02 \times 2^3 - 0,135 \times 2^2 + 0,6 \times 2 + 15 = 15,74$
Réponse a.

Question 2

Soit f une fonction polynôme du second degré donnée, pour tout nombre réel x par
$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont réels. On note Δ son discriminant. On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et on suppose qu'elle admet l'axe des abscisses comme tangente en un de ses points.



On peut affirmer que :

a. $a < 0$ et $\Delta < 0$	**b.** $a > 0$ et $\Delta = 0$	**c.** $a < 0$ et $\Delta = 0$	**d.** $a < 0$ et $\Delta > 0$

La parabole est tournée vers les y négatifs donc $a < 0$.
La parabole est tangente à l'axe des abscisses donc $\Delta = 0$.
Réponse c.

Question 3

$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ est égal à :

a. $\cos(x) - \sin(x)$	**b.** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$	**c.** $\sin(x)$	**d.** $-\sin(x)$

Propriété du cercle trigonométrique.
Réponse d.

Question 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne les points A $(-7~;~4)$ et B $(1~;~-2)$.
Le cercle Γ de diamètre [AB] admet comme équation dans ce repère :

a. $(x+7)^2+(y-4)^2=100$	**b.** $(x+3)^2+(y-1)^2=25$
c. $(x+3)^2+(y-1)^2=100$	**d.** $(x+7)^2+(y-4)^2=25$

Un cercle de centre Ω et de rayon R a pour équation $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=R^2$
Le centre du cercle de diamètre [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{-7+1}{2}~;~\dfrac{4-2}{2}\right)=(-3~;~1)$.
Le diamètre AB vaut
$\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(1-(-7))^2+(-2-4)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$.
Donc le rayon R du cercle est égal à 5 donc $R^2=25$.
Réponse b.

Question 5

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes respectives $3x+2y-1=0$ et $6x+4y+2=0$ sont :

a. sécantes et non perpendiculaires	**b.** confondues	**c.** strictement parallèles	**d.** perpendiculaires

Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}(-2~;~3)$ et $\overrightarrow{v'}(-4~;~6)$; or $\overrightarrow{v'}=2\overrightarrow{v}$, donc les deux vecteurs sont colinéaires, ce qui entraîne que les deux droites sont parallèles.
Le point A de coordonnées $(1~;~-1)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ car $3x_A+2y_A-1=3-2-1=0$.
Mais $6x_A+4y_A+2=6-4+2\neq 0$ donc $A\notin\mathcal{D}'$.
Les deux droites sont parallèles non confondues donc elles sont strictement parallèles.
Réponse c.

Exercice 2 — 5 points

Une collectivité locale octroie une subvention de 116 610 € pour le forage d'une nappe d'eau souterraine. Une entreprise estime que le forage du premier mètre coûte 130 € ; le forage du deuxième mètre coûte 52 € de plus que celui du premier mètre ; le forage du troisième mètre coûte 52 € de plus que celui du deuxième mètre, etc.
Plus généralement, le forage de chaque mètre supplémentaire coûte 52 € de plus que celui du mètre précédent.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note : u_n le coût du forage du n-ième mètre en euros et S_n le coût du forage de n mètres en euros ; ainsi $u_1=130$.

1. $u_2=130+52=182$ et $u_3=182+52=234$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_1=130$ et de raison $r=52$.
   On en déduit que pour tout $n\geqslant 1$, on a : $u_n=u_1+(n-1)\times r$ donc $u_n=130+52(n-1)$.
3. $S_2=u_1+u_2=130+182=312$ et $S_3=u_1+u_2+u_3=S_2+u_3=312+234=546$.
4. Afin de déterminer le nombre maximal de mètres que l'entreprise peut forer avec la subvention qui est octroyée, on considère la fonction Python suivante :

```
def nombre_metre(S) :
  C = 130
  n = 1
  while C < S :
    C = C + ...
    n = n + 1
  return n
```

On veut compléter cet algorithme de sorte que l'exécution de la fonction `nombre_metre(S)` renvoie le nombre maximal de mètres que l'entreprise peut forer avec la subvention octroyée.
La variable `C` contient le coût du forage de `n` mètres.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1}$; or $u_n = 130 + 52(n-1)$ donc $u_{n+1} = 130 + 52n$. On a donc $S_{n+1} = S_n + 130 + 52n$.
Il faut donc ajouter $130 + 52n$ à la variable `C` à chaque tour de boucle.

```
def nombre_metre(S) :
  C = 130
  n = 1
  while C < S :
    C = C + 130 + 52*n
    n = n + 1
  return n
```

5. On admet que, pour tout entier naturel non nul, $S_n = 26n^2 + 104n$.
On cherche le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 116610$.
On résout l'équation $26n^2 + 104n - 116610 = 0$.
$\Delta = 104^2 - 4 \times 26 \times (-116610) = 12\,138\,256 = 3\,484^2$
Deux solutions : $n' = \dfrac{-104 + 3\,484}{2 \times 26} = 65$ et $n'' = \dfrac{-104 - 3\,484}{2 \times 26} = -69 < 0$.
Avec 116610 €, on pourra creuser 65 mètres.

Exercice 3 — 5 points

1. On lance deux dés cubiques équilibrés « classiques » et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces.
Le jeu est gagné si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10.

a. On détermine tous les résultats possibles :

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

La variable aléatoire X prend donc les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 et 36.

b. Dans le tableau, il y a 36 résultats qui sont équiprobables ; donc, par exemple, la probabilité d'obtenir 4 est $\dfrac{3}{36}$ car le 4 apparaît 3 fois dans le tableau.
On détermine alors la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c. La probabilité de gagner est :
$P(\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,8\,,9\}) = \dfrac{1}{36}+\dfrac{2}{36}+\dfrac{2}{36}+\dfrac{3}{36}+\dfrac{2}{36}+\dfrac{4}{36}+\dfrac{2}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{17}{36}$.
On peut dire aussi qu'il y a 17 cas favorables (en bleu) sur 36 cas possibles.

2. On lance à présent deux dés spéciaux : ce sont des dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées différemment des dés classiques.

- Les faces du premier dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 2, 2, 3, 3, 4.
- Les faces du deuxième dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 3, 4, 5, 6, 8.

On note Y la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces après lancer de ces deux dés spéciaux.
On détermine tous les résultats possibles :

	1	2	2	3	3	4
1	1	2	2	3	3	4
3	3	6	6	9	9	12
4	4	8	8	12	12	16
5	5	10	10	15	15	20
6	6	12	12	18	18	24
8	8	16	16	24	24	32

L'évènement $Y<10$ comporte 17 cas favorables (en bleu dans le tableau). Il y a équiprobabilité donc $P(Y<10)=\dfrac{17}{36}$.

3. Les deux probabilités de gagner étant égales, il est équivalent de jouer au jeu de la question 1 avec des dés classiques ou avec des dés spéciaux.

Exercice 4 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+6\,\mathrm{e}^{x}-8x-4.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f ;
- $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $y=-8x-4$.

1.
- Pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=2\,\mathrm{e}^{2x}+6\,\mathrm{e}^{x}-8$.
- Pour tout $x\in\mathbf{R}$, $2\,(\mathrm{e}^{x}-1)\,(\mathrm{e}^{x}+4)=2\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+4\,\mathrm{e}^{x}-4\right)=2\,\mathrm{e}^{2x}+6\,\mathrm{e}^{x}-8$.

On peut donc en déduire que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=2\,(\mathrm{e}^{x}-1)\,(\mathrm{e}^{x}+4)$.

2. On étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbf{R}$.

- Pour tout x de $\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{x}>0$ donc $\mathrm{e}^{x}+4>0$.
- On sait que $\mathrm{e}^{x}>1 \iff x>0$ donc $\mathrm{e}^{x}-1>0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
- De plus $\mathrm{e}^{x}-1=0 \iff \mathrm{e}^{x}=1 \iff x=0$.

D'où le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. La dérivée s'annule et change de signe pour $x = 0$; $f(0) = \mathrm{e}^0 + 6\mathrm{e}^0 - 0 - 4 = 3$.
On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

4. La fonction f admet pour minimum le nombre strictement positif 3, donc pour tout x de $\mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

5. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun si et seulement si l'équation $f(x) = -8x - 4$ admet une solution.
On résout cette équation :
$f(x) = -8x-4 \iff \mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x - 8x - 4 = -8x - 4 \iff \mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x = 0 \iff \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 6\right) = 0$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le produit $\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 6\right)$ n'est jamais nul.
L'équation n'a donc pas de solution, ce qui veut dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

Figure (non demandée)

Exercice 4