∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU ∽
Corrigé du sujet 65 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 — 5 points

1.

$$A(2\ ;\ -2),\quad B(4\ ;\ 0),\quad C(0\ ;\ -5),\quad D(-7\ ;\ 1).$$

Affirmation 1 : On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-7\\6\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2\times(-7)+2\times 6 = -14++12 = -2 \neq 0$: le produit scalaire n'est pas nul, les vecteurs ne sont pas orthogonaux, les droites (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

Affirmation 2 : Le point E(3 ; -2) appartient à la droite d'équation $y = x-5$.

Or $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 3+2\times 3 = 2 \neq 0$.

La droite d'équation $y = x-5$ contient le point C mais n'est pas perpendiculaire à la droite (AB).

Affirmation 3 : On a $AB^2 = (4-2)^2+0-(-2))^2 = 4+4 = 8$. Une équation du cercle de centre A passant par B est donc :

$(x-2)^2+(y-(-2))^2 = 8$, soit $(x-2)^2+(y+2)^2 = 8$. Affirmation vraie.

2. Affirmation 4 : On dérive f comme quotient de fonctions dérivables, puisque x est non nul :

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\times x-1\times\mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

D'où $f'(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1(1-1)}{1^2} = \dfrac{0}{1} = 0$.

3. Affirmation 5 : $\dfrac{2\pi}{5}$ en radian correspondent à $\dfrac{2\times 180}{5} = 72$ en degré.

On est donc dans le premier quadrant : le cosinus et le sinus sont tous les deux positifs : l'affirmation est fausse.

EXERCICE 2 — 5 points

$$f(x) = \frac{0,5x^3-3x^2+x+16}{x}$$

1. Il faut calculer $f(2) = \dfrac{0,5\times 2^3-3\times 2^2+2+16}{2} = \dfrac{4-12+2+16}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ (milliers d'euros).

2. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\,;\,5]$, et comme la déivée de $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, on a :

   $f'(x) = \dfrac{x\left(1,5x^2-6x+1\right)-1\left(0,5x^3-3x^2+x+16\right)}{x^2} = \dfrac{1.5x^3-0.5x^3-6x^2+3x^2+x-x-16}{x^2} = \dfrac{x^3-3x^2-16}{x^2}$.

3. On a quel que soit le réel x,

   $(x-4)(x^2+x+4) = x^3+x^2+4x-4x^2-4x-16 = x^3-3x^2-16$.

4. D'après le résultat précédent : $f'(x) = \dfrac{(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}$ sur $[1\,;\,5]$.

   Comme $x^2 > 0$, pour $1 \leqslant x \leqslant 5$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $(x-4)\left(x^2+x+4\right)$.

   Le signe de $x-4$ est aisé à trouver sur $[1\,;\,5]$;

   Signe du trinôme $(x^2+x+4$: on a $\Delta = 1^2-4\times 4 = -16$.

   Le trinôme n'a pas de racines, et il a le signe du coefficient de x^2, donc positif pour tout réel donc en particulier sur $[1\,;\,5]$

   Finalement le signe de $f'(x)$ est celui de $x-4$. D'où le tableau de variations avec $f(1) = 0,5-3+1+16 = 14,5$, $f(4) = \dfrac{32-48+4+16}{4} = 1$ et $f(5) = \dfrac{62,5-75+5+16}{5} = \dfrac{8.5}{5} = 1,7$.

x	1		4		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$14,5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

5. D'après le tableau de variations précédent le minimum de la fonction f est $f(4) = 1$.
Il faut donc produire 4 000 pièces pour avoir un coût minimum de 1 000 euros correspondant à cette production.

Exercice 3 **5 points**

Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de spectateurs, en milliers, du complexe cinématographique pour l'année $(2018+n)$. On a donc $u_0 = 180$.

1. Étude de la suite (u_n).

a. Augmenter de 4 %, c'est multiplier par $\left(1+\dfrac{4}{100}\right) = 1+0,04 = 1,04$.
On a donc $u_1 = u_0 \times 1,04 = 180 \times 1,04 = 187,2$.
Le nombre de spectateurs en 2019 devrait être égal à 187 200.

b. Le nombre de spectateurs est celui de l'année d'avant multiplié par 1,04. On a donc :
pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n \times 1,04$, ce qui montre que la suite (u_n) est géométrique de premier terme 180 et de raison 1,04.

c. On sait qu'alors $u_n u_0 \times 1,04^n = 180 \times 1,04^n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. Un cinéma était déjà installé au centre-ville. En 2018, il a accueilli 260 000 spectateurs. Avec l'ouverture du complexe, le cinéma du centre-ville prévoit de perdre 10 000 spectateurs par an.

a. Quelle est la nature de la suite (v_n)? On a donc pour tout naturel n, $v_{n+1} = v_n - 10$, ce qui montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 260$ et de raison -10.

b. On donne le programme ci-dessous, écrit en Python.

```python
def cinema() :
  n = 0
  u = 180
  v = 260
  while u < v :
    n = n + 1
    u = 1.04*u
    v = v - 10
  return n
```

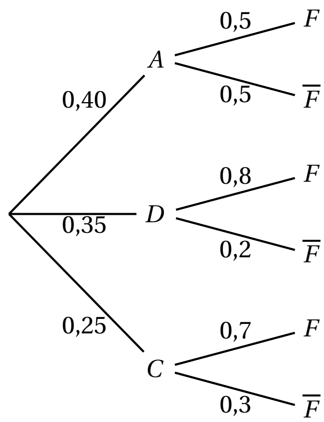
La fonction cinema() renvoie $n = 5$.

n	u_n	v_n
0	180	260
1	187,2	250
2	194,7	240
3	202,5	230
4	210,6	220
5	219	210

Ceci montre que la 5$^{\text{e}}$ année, soit en 2023, le nombre de spectateurs du nouveau complexe sera supérieur à celui de l'ancien cinéma.

Exercice 4 **5 points**

1. Reproduire et compléter sur la copie l'arbre de probabilité ci-dessous représentant la situation.



2. Démontrer que $p(F) = 0,655$.

On a :

$p(A \cap F) = p(A) \times P_A(F) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$;

$p(D \cap F) = p(A) \times P_D(F) = 0,35 \times 0,8 = 0,28$;

$p(C \cap F) = p(A) \times P_C(F) = 0,27 \times 0,7 = 0,175$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(F) = p(A \cap F) + p(D \cap F) + p(C \cap F) = 0,2 + 0,28 + 0,175 = 0,655$.

3. On interroge au hasard un spectateur ayant acheté des friandises. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dessin animé ? On donnera l'arrondi à 10^{-3}.

Il faut trouver $P_F(D)$.

Or $P_F(D) = \dfrac{P(F \cap D)}{P(F)} = \dfrac{D \cap F}{P(F)} = \dfrac{0,28}{0,655} \approx 0,4274 \approx 0,427$ au millième près.

4. Une place de cinéma coûte 10 €. On considérera que si un spectateur achète des friandises, il dépense 18 € pour sa place de cinéma et ses friandises.

On note X la variable aléatoire donnant le coût d'une sortie au cinéma pour un spectateur.

a. X ne peut prendre que deux valeurs :

— 18 avec une probabilité de 0,655 ;

— 10 avec une probabilité de $1 - 0,655 = 0,345$.

b. Le coût moyen par spectateur d'une sortie dans ce cinéma est égale à l'espérance mathématique de la variable X, soit :

$E(X) = 18 \times 0,655 + 10 \times 0,345 = 15,24$ (€).