∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∽ série générale e3c Corrigé du n° 4 année 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

Exercice 1 **5 points**

Ce QCM comprend 5 questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1 :

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(4 ; 2), B(2 ; 6). Une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB] est :

a. $x = 3$	**b.** $x-2y+5=0$	**c.** $x+2y-11=0$	**d.** $y=0,5x+3$

Le milieu I de [AB] a pour coordonnées (3 ; 4). Si (Δ) est la médiatrice de [AB], alors
$M(x\,;\,y)\in(\Delta) \iff \overrightarrow{\text{I}M}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0 \iff -2(x-3)+4(y-4)=0 \iff -2x+4y-10=0 \iff$
$x-2y+5=0$.

Question 2 :

On donne deux points P et N tels PN = 6.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{MP}}\cdot\overrightarrow{\text{MN}}=0$ est :

a. la droite (PN).	**b.** le cercle de diamètre [PN].	**c.** un cercle de rayon 6	**d.** le milieu du segment [PN].

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{MP}}$ et $\overrightarrow{\text{MN}}$ sont orthogonaux, donc les droites (MP) et (MN) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M et l'ensemble des points est le cercle de diamètre [NP].

Question 3 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-4x+5$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de g dans un repère orthonormé au point d'abscisse -1 est :

a. $y=8x+7$	**b.** $y=-7x+1$	**c.** $y=-x+7$	**d.** $x=-0,5$

Onn a $g'(x)=3x^2-4$ et en particulier $g'(-1)=3-4=-1$.
Si t est la tangente, $M(x\,;\,y)\in T \iff y-g(-1)=g'(-1)(x-(-1))$.
Avec $g(-1)=-1+4+5=8$, ona donc :
$M(x\,;\,y)\in T \iff y-8=-1(x-(-1)) \iff y=-x+7$.

Question 4 :

L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y=x^2+x+3$ est :

a. $y=x$	**b.** $y=-0,5x+1$	**c.** $y=-0,5$	**d.** $x=-0,5$

En écrivant $y=x^2+x+3=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+3=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$, on voit que la droite d'équation $x=-0,5$ est axe de symétrie de la parabole.

Question 5 :

L'inéquation $-3\text{e}^{x+2}>-3\text{e}^4$ d'inconnue x, a pour ensemble de solutions :

a. $]-2\ ;\ +\infty[$	**b.** $]2\ ;\ +\infty[$	**c.** $]-\infty\ ;\ 2[$	**d.** $]-\infty\ ;\ -2[$

L'inéquation peut s'écrire $3\text{e}^4 > 3\text{e}^{x+2}$ ou en simplifiant par 3 : $\text{e}^4 > \text{e}^{x+2}$ et en multipliant par e^{-4}, $\text{e}^0 > \text{e}^{x-2}$, soit finalement $0 > x-2$ ou $x < 2$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2[$.

Exercice 2 **5 points**

Partie A :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 25\,000$ et de raison $0,94$.
(v_n) est une suite définie par : $v_n = 50(104+25n)$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer une forme explicite de la suite (u_n).
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, , $u_n = 25\,000 \times 0,94^n$.
2. Calculer la somme des sept premiers termes de la suite (u_n).
   Avec $S_7 = u_0 + u_1 + \ldots + u_6$,
   $0,94S_7 = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$, d'où par différence :
   $0,06S_7 = u_0 - u_7 = 25\,000 - 25\,000 \times 0,94^7$, d'où $S_7 = 25\,000 \times \dfrac{1-0,94^7}{0,06} = 25\,000 \times \dfrac{0,351\,522}{0,06} =$ $146\,468$.
3. Comparer les termes u_0 et v_0 puis u_{20} et v_{20}.
   - $u_0 = 25\,000$ et $v_0 = 50 \times 104 = 5\,200$: $u_0 > v_0$;
   - $u_{20} = 25\,000 \times 0,96^{20} \approx 7\,252,66$ et $v_{20} = 50 \times (104 + 50 \times 20) = 50 \times 1\,104 = 55\,200$; $u_{20} < v_{20}$.
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < v_n$.
   Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation :
   $25\,000 \times 0,94^n < 50(104+25n)$.
   On a $u_8 = 15\,239,2$ et $v_8 = 50 \times (104 + 25 \times 8) = 15\,200$
   $u_9 = 14\,324,9$ et $v_9 = 50(104 + 25 \times 9) = 16\,450$.
   9 est donc le nombre solution.

Partie B :

Un concessionnaire de voitures propose des voitures équipées d'un moteur diesel ou d'un moteur essence.
Durant sa première année d'existence en 1995, il a vendu 25 000 véhicules avec un moteur diesel et 5 200 véhicules avec un moteur essence.
Ses ventes de voitures avec un moteur diesel ont diminué de 6 % chaque année, alors que ses ventes de voitures avec un moteur essence ont augmenté de 1 250 unités tous les ans.
En quelle année les ventes de voitures avec un moteur essence ont elles dépassé les ventes de voitures avec un moteur diesel ?
u_n et v_n représentent les nombres de voitures respectivement diesel et essence vendues à partir de 1995.
D'après le résultat précédent en 1995 + 9 = 2004, le nombre de véhicules diesel vendues sera inférieur à celui des véhicules essence.

Exercice 3 **5 points**

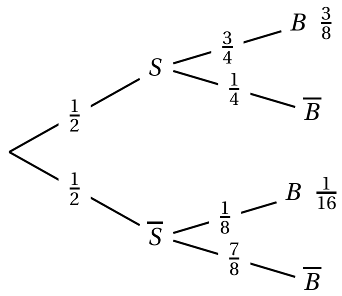
On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte.
Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard dans le paquet. Ensuite, on essaye de répondre à la question posée.
Un groupe de copains participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime qu'il a :

- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

On note S l'évènement « La question est dans la catégorie Sciences » et B l'évènement « La réponse donnée par le groupe est bonne ».

Partie A :

1. Calculer $P(B \cap S)$.
On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



On a $P(B \cap S) = P(S \cap B) = P(S) \times P_S(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

2. Déterminer la probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée.
D'après la loi des probabilités totales on a :
$P(B) = P(B \cap S) + P\left(B \cap \overline{S}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$.

3. Les évènements S et B sont-ils indépendants?
On a avec $P(S) = \frac{1}{2}$:
$P(B \cap S) = \frac{3}{8}$ et $P(B) \times P(S) = \frac{7}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{32}$.
Les évènements S et B ne sont donc pas indépendants.

Partie B :

Pour participer à ce jeu, on doit payer 5 € de droit d'inscription. On recevra :

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte;
- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte;
- rien si la réponse donnée est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5 € de droit d'inscription.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
On a $P\left(\overline{B}\right) = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$. D'où le tableau :

X	-5	5	25
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

2. Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python avec les listes :
L =[-5 ; 5 ; 25] et G = [0,5625 ; 0,375 ; 0,062 5] ?

```
def Jeu(L,G):
  n = len(L)
  E = 0
  for i in range(n):
    E =E + L[i]*G[i]
  return(E)
```

L'algorithme donne l'espérance mathématique du jeu :
$E = -5 \times \dfrac{9}{16} + 5 \times \dfrac{6}{16} + 25 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{-45 + 30 + 25}{16} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8} = 0,625$ (€).
En moyenne ce jeu permettra de gagner 6,25 € en 10 parties.

Exercice 4 **5 points**

On souhaite fabriquer des boîtes de rangement sans couvercle.
Les boîtes auront la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16 cm et de base un rectangle ayant pour dimensions x et y exprimées en cm.
Chaque boîte a un volume de 10 000 cm^3.

1. Calculer y lorsque $x = 20$ cm.
Le volume de la boîte est donc :
$V = 16xy$.
Avec $V = 10000$ et $x = 20$, on a donc :
$10000 = 16 \times 20 \times y \iff 10000 = 320y \iff y = 31,25$ (cm).

2. Pour toute valeur de $x > 0$, on note $f(x)$ l'aire du parallélépipède rectangle.
Démontrer que : pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{20000}{x} + 32x + 625.$$

On a une base d'aire xy, deux côtés d'aire $16x$ et deux côtés d'aire $16y$.
L'aire du parallélépipède rectangle est donc égale à :
$f(x) = xy + 32x + 32y$ et on sait que $10000 = 16xy \iff y = \dfrac{625}{x}$.
Donc $f(x) = x \times \dfrac{625}{x} + 32x + 32 \times \dfrac{625}{x} = 200 + 20x = \dfrac{20000}{x} + 32x + 625$.

3. Quelles dimensions doit-on donner à ces boîtes pour que leur surface ait une aire minimale ?
On a $f'(x) = -\dfrac{20000}{x^2} + 32$.

- $-\dfrac{20000}{x^2} + 32 > 0 \iff 32 > \dfrac{20000}{x^2} \iff x^2 > \dfrac{20000}{32} \iff x^2 > 625 \iff x^2 > 25^2 \iff x > 25$.
- $-\dfrac{20000}{x^2} + 32 < 0 \iff 32 > \dfrac{20000}{x^2} \iff x^2 < \dfrac{20000}{32} \iff x^2 < 625 \iff x^2 < 25^2 \iff x < 25$.
- $-\dfrac{20000}{x^2} + 32 = 0 \iff 32 = \dfrac{20000}{x^2} \iff x^2 = \dfrac{20000}{32} \iff x^2 = 625 \iff x^2 = 25^2 \iff x = 25$.

Donc l'aire est décroissante sur $[0 ; 25]$, puis croissante pour $x > 25$: le minimum de l'aire est donc obtenu pour $x = 25$. On aura $y = \dfrac{625}{25} = 25$.
Les boîtes feront donc : $25 \times 25 \times 16$ (cm).