∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∾
série générale e3c Corrigé du n° 30 année 2020

Exercice 1 **5 points**

Ce QCM comprend 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. L'inéquation $2x^2 - 9x + 4 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :
   a. $S = \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 4\right]$
   b. $S = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup [4\ ;\ +\infty[$
   c. $S = \emptyset$
   d. $S =]-\infty\ ;\ -4] \cup \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

   Pour l'équation $2x^2 - 9x + 4 = 0$, on a $\Delta = 81 - 32 = 49 = 7^2 > 0$: l'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{9+7}{4} = 4$ et $x_2 = \dfrac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$.
   On sait que le trinôme est du signe de $a = 2$ donc positif sauf entre les racines. On a donc $S = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup [4\ ;\ +\infty[$

2. On considère la fonction g définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par

   $$g(x) = -x^2 + 4x$$

   alors
   a. le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 4
   b. le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 4
   c. le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 2
   d. g est décroissante sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$

   Écriture canonique : $-x^2+4x = -\left(x^2 - 4x\right) = -\left[(x-2)^2 - 4\right] = -(x-2)^2+4$. On voit que pour $x = 2$ la fonction a pour maximum 4.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. La droite passant par le point $\text{A}(0\ ;\ -7)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ a pour équation
   a. $2x - 5y - 35 = 0$
   b. $2x - 5y + 35 = 0$
   c. $-5x - 2y + 14 = 0$
   d. $5x + 2y + 14 = 0$

   Soit Δ la droite; alors :
   $M(x\ ;\ y) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{A}M} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 2(x-0) - 5(y-(-7)) = 0 \iff 2x - 5y - 35 = 0.$

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. L'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 12$ est
   a. le point de coordonnées $(5 : 1)$
   b. le cercle de centre $\text{A}(2\ ;\ -3)$ et de rayon $\sqrt{12}$
   c. le cercle de centre $\text{A}(2\ ;\ -3)$ et de rayon 5
   d. le cercle de centre $\text{B}(-2\ ;\ 3)$ et de rayon 5

On peut écrire :
$x^2-4x+y^2+6y=12=(x-2)^2-4+(y+3)^2-9=12 \iff (x-2)^2+(y+3)^2=25$.
On reconnait l'équation du cercle de centre $(2~;~-3)$ et de rayon 5.

5. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la droite d d'équation $2x+3y-1=0$.

a. La droite d est perpendiculaire à la droite (AB), où $\text{A}(-2~;~3)$ et $\text{B}(2;9)$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d.

c. La droite perpendiculaire à d passant par le point $(-1~;~2)$ admet pour équation $3x-2y+1=0$.

d. La droite parallèle à d passant par le point $(2;3)$ admet pour équation $2x+3y+13=0$.

Si $x=-1$, alors $y=1$: $\text{C}(-1~;~1)\in(d)$;
Si $x=-4$, alors $y=3$, $\text{D}(-4~;~3)\in(d)$.
Donc $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
Or $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}=-12+12=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d est perpendiculaire à la droite (AB).

Exercice 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)\,\text{e}^x$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f,

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(2x+1)\text{e}^x$.
En dérivant le produit, toutes les fonctions étant dérivables :
$f'(x)=2\text{e}^x+(2x-1)\text{e}^x=\text{e}^x(2+2x-1)=(2x+1)\text{e}^x$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On sait que l que soit $x\in\mathbb{R}$, $\text{e}^x>0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$ qui s'annule pour $x=-\dfrac{1}{2}$.

- $f'(x)>0$ sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}~;~+\infty[$;
- $f'(x)<0$ sur l'intervalle $]-\infty~;~-\frac{1}{2}[$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
La question précédente montre que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty~;~-\frac{1}{2}[$ et croissante sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}~;~+\infty[$ avec donc un minimum en $x=-\dfrac{1}{2}$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-2\text{e}^{-\frac{1}{2}}\approx-1,213$.
D'où le tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$\approx -1,213$	↗	

Dans les questions suivantes, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
$\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en des points dont l'ordonnée est nulle, donc tels que :
$(2x-1)\text{e}^x=0 \iff 2x-1=0$ (car $\text{e}^x\neq0$) d'où $x=\dfrac{1}{2}$.
$\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en le point $\left(\frac{1}{2}~;~0\right)$.

5. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
Avec $f(0) = -\text{e}^0 = -1$ et $f'(0) = 1\text{e}^0 = 1$, on obtient :
$M(x\,;\,y) \in T \iff y - (-1) = 1(x-0) \iff y = x - 1$.

Exercice 3 **5 points**

On appelle pourcentage de compression d'une image, le pourcentage de réduction de sa taille en ko (kilo-octets) après compression.
Une image a une taille initiale de 800 ko. Après une première compression, sa taille est de 664 ko.

1. Calculer le pourcentage de réduction associé à cette première compression.
On a $\dfrac{664}{800} = \dfrac{8\times 83}{8\times 100} = \dfrac{83}{100}$ ce qui représente une réduction de $1 - \dfrac{83}{100} = \dfrac{17}{100}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe le pourcentage de réduction à 17 %. On effectue n compressions successives.
Pour tout entier naturel n, on note t_n la taille de l'image en ko après n compressions.
On a donc $t_0 = 800$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer t_{n+1} en fonction de t_n et en déduire la nature de la suite (t_n).
On a vu que réduire de 17 %, c'est multiplier la taille de l'image par 0,83. On a donc

$$t_{n+1} = 0,83t_n.$$

La suite (t_n) est donc une suite géométrique de premier terme $U_0 = 800$ et de raison 0,83.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer t_n en fonction de n.
On sait que pour tout naturel n, $t_n = t_0 \times 0,83^n$ ou $t_n = 800 \times 0,83^n$.
Afin de déterminer le nombre minimal n de compressions successives à effectuer pour que cette image ait une taille finale inférieure à 50 ko, on considère la fonction Python suivante :

```
def nombreCompressions(A):
    t = 800
    n = 0
    While t > A:
        t = t*0,83
        n = n+1
    return n
```

4. Préciser, en justifiant, le nombre A de sorte que l'appel `nombreCompressions(A)` renvoie le nombre de compressions successives à effectuer que l'on cherche à déterminer.
Il faut que A = 50 : tant que `t > A` l'algorithme tourne.

5. Quel est le nombre minimal de compressions successives à effectuer pour que ce fichier ait une taille finale inférieure à 50 ko ?
Il faut réduire 15 fois la taille pour obtenir une image d'à peu près 48,9 ko.

Exercice 4 **5 points**

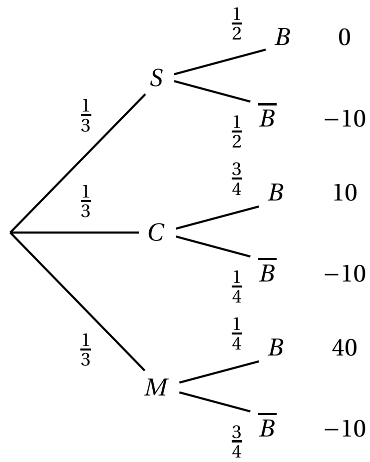
Dans un jeu, Jeanne doit trouver la bonne réponse à une question posée.
Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma et musique.
Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :

- 1 chance sur 2 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;
- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;
- 1 chance sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

On note :
S l'évènement : « Jeanne est interrogée en sport » ;
C l'évènement : « Jeanne est interrogée en cinéma » ;
M l'évènement : « Jeanne est interrogée en musique » ;

B l'évènement : « Jeanne donne une bonne réponse »
Rappel de notation : la probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.
Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. On admet donc que $P(S) = P(C) = P(M) = \frac{1}{3}$.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.



2. Jeanne tire au hasard une question. Montrer que $P(B) = \frac{1}{2}$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(B) = P(S \cap B) + P(C \cap B) + P(M \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}\frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Pour participer à ce jeu, Jeanne doit payer 10 € de droit d'inscription. Elle recevra :

- 10 € si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne ;
- 20 € si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne ;
- 50 € si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne ;
- rien si la réponse qu'elle donne est fausse.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne associe son gain algébrique, c'est-à-dire la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10 € de droit d'inscription.

3. Montrer que $P(X = 40) = \frac{1}{12}$.

On a $P(X = 40) = P(M \cap B) = P(M) \times P_M(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

4. Déterminer la loi de probabilité de X.

On a $P(X = -10) = P\left(S \cap \overline{B}\right) + P\left(C \cap \overline{B}\right) + P\left(M \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$;

$P(X = 0) = P(S \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

$P(X = 10) = P(C \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. D'où le tableau de la loi de probabilités :

x_i	-10	0	10	40
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

5. Calculer l'espérance mathématique de X. Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

On a $E(X) = -10 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{12} = -5 + \frac{1}{4} + \frac{10}{3} = \frac{-60 + 30 + 40}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

L'espérance est positive, donc Jeanne peut jouer mais elle gagnera à peu près 0,83 € par partie.