ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2
Corrigé du sujet 19 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

Exercice 1 — 5 points

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$.
On a pour l'équation $f(x) = 0$, $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 36 + 64 = 100 = 10^2 > 0$.
L'équation a deux solutions : $\dfrac{-6+10}{2\times 2} = 1$ et $\dfrac{-6-10}{2\times 2} = -4$.
On sait qu'alors $f(x)$ se factorise en : $f(x) = 2(x-1)(x+4)$

Question 2

$\dfrac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x+x} = \mathrm{e}^{3x}$

Question 3

On sait qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :
$y - g(0) = g'(0)(x-0)$, soit $y - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^0 x$ et enfin $y = x + 1$.

Question 4

La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a donc pour tout réel :
$f'(x) = -1\mathrm{e}^x + (-x+1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1+-x+1) = \mathrm{e}^x \times (-x) = -x\mathrm{e}^x$.

Question 5

Les propositions **a.**, **c.** et **d.** sont vraies . Quant à $f'(3) = -2$ ce nombre dérivé est bien négatif mais bien plus grand que -2.

Exercice 2 — 5 points

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse.
La première injection est de 10 ml, puis toutes les heures on lui en injecte 1 ml .
On étudie l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang en prenant le modèle suivant :

— on estime que 20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure ;

— pour tout entier naturel n, on note U_n la quantité de médicament en ml présente dans le sang au bout de n heures.

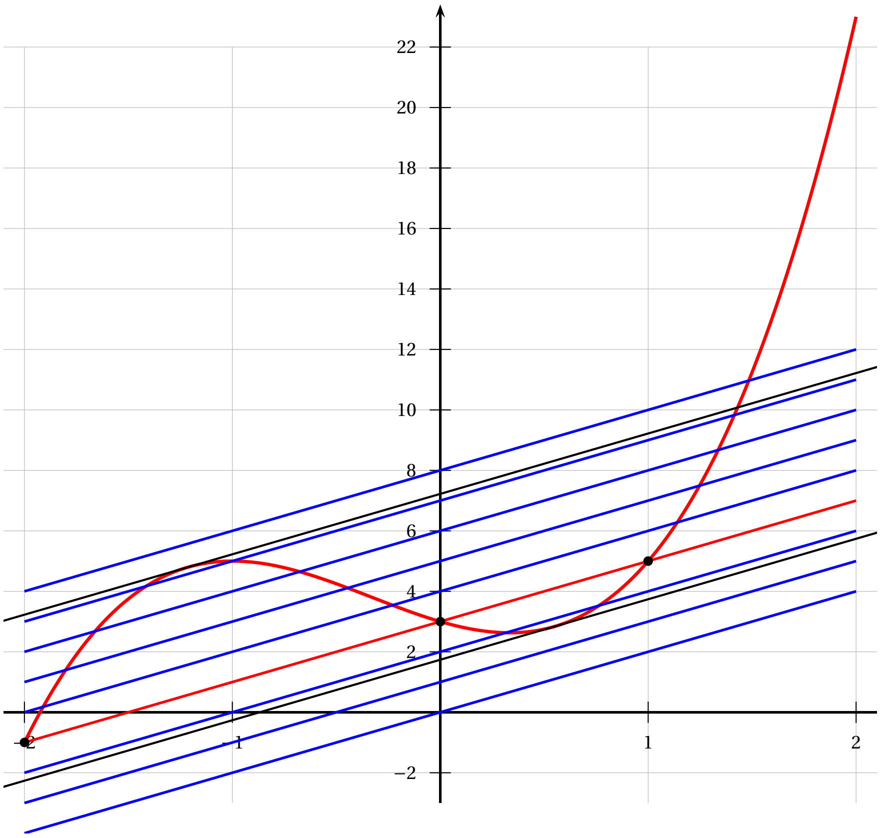
Ainsi, $U_0 = 10$.

1. On retranche 20 %, donc on multiplie par $1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$.
   Donc $10 \times 0,8 + 1 = 8 + 1 = 9 = U_1$.
2. On a vu que le terme précédent de la suite est multipliée par 0,8 et que l'on ajoute ensuite 1.
   On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0,8U_n + 1$.
3. On peut conjecturer que la limite de la suite est égale à 5.
4. Cet algorithme permet de trouver le rang N tel que $U_N \leqslant 5,1$.
5. L'algorithme donnera $N = 18$.

EXERCICE 3 **(5 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ par

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$$



1. **a.** $M(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \cap d \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2x+3 \\ y & = & 2x^3+2x^2-2x+3 \end{array}\right. \Rightarrow 2x+3 = 2x^3+2x^2-2x+3 \iff$ $2x^3+2x^2-4x = 0 \iff 2x\left(x^2+x-2\right) = 0$.

   b. On résout l'équation précédente :

   $2x\left(x^2+x-2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x^2+2x-2 & = & 0 \end{array}\right.$

   La première solution est $x = 0$, d'où $y = 2 \times 0 + 3 = 3$.

   Pour l'équation du second degré : $x^2 + x - 2 = 0$

   $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

   $x = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $x = \dfrac{-1-3}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$, d'où les ordonnées respectives

   $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$ et $f(-2) = -4 + 3 = -1$.

   Les points commune à d et à $\mathcal{C}$ ont pour coordonnées :

   $$(0\,;\,3), \qquad (1\,;\,5), \qquad (-2\,;\,-1)$$

2. On voit qu'il existe deux valeurs de a (ordonnée à l'origine des droites tangentes à la courbe), $a \approx 1{,}9$ et $a \approx 7{,}1$.

   Remarque : il faut trouver des points d'abscisse x tels que le nombre dérivé est égal à 2, soit résoudre l'équation :

   $6x^2 + 4x - 2 = 2 \iff 6x^2 + 4x - 4 = 0 \iff 3x^2 + 2x - 2 = 0$.

   On a $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times (2) = 4 + 24 = 28 > 0$: il y a deux solutions :

   $x = \dfrac{-2+\sqrt{28}}{6} \approx 0{,}549$ et $x = \dfrac{-2-\sqrt{28}}{6} \approx -1{,}215$. Les droites sont tracées en noir.

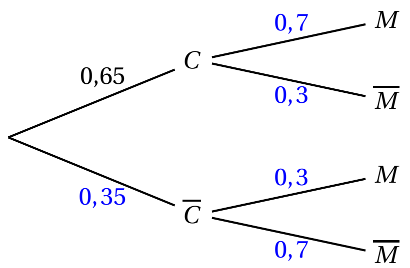
3. **a.** Le polynôme $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 2\left(3x^2 + 2x - 1\right)$.
Or pour le trinôme $3x^2 + 2x - 1$, $\Delta = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$: le trinôme a deux racines :
$\dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{-2-4}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1$.
On sait qu'alors $3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$. Donc

$$f'(x) = 6(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

b. On sait que $f'(x)$ est positive sauf sur l'intervalle $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$, donc la fonction est croissante sauf sur l'intervalle $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$ où elle décroissante.

Exercice 4 **5 points**

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. $p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M) = 0,65 \times 0,7 = 0,455$.

3. O a de même $p\left(\overline{C} \cap M\right) = p\left(\overline{C}\right) \times p_{\overline{C}}(M) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(M) = p(C \cap M) + p\left(\overline{C} \cap M\right) = 0,455 + 0,105 = 0,56$.

4. On doit calculer $p_M(C) = \dfrac{p(M \cap C)}{p(M)} = \dfrac{p(C \cap M)}{p(M)} = \dfrac{0,455}{0,56} = 0{,}8125$.

5.

Une semaine de pension complète	800 €
Une semaine de demi-pension	650 €
Option « ménage »	50 €

On ne peut arriver à un montant de 850 € que si on prend la pension complète et l'option « ménage ». On a donc :
$p(X = 850) = p(C \cap M) = 0,455$.