

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

NOM :

Note :

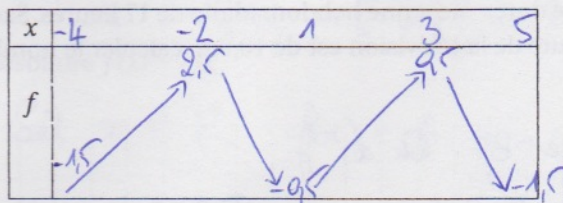
PRÉNOM :

EXERCICE 1

PARTIE A : LECTURE GRAPHIQUE

La courbe \mathcal{C} sur le graphique, joint en ANNEXE 1 sur la feuille intercalaire, représente une fonction f .

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction? $D_f = [-4; 5]$
2. Quelle est l'image de -1 par f ? $1,5$
3. Quels sont les antécédents de 1 par f ? $-3,25$ et $-0,7$
4. Construire le tableau de variation de f .



5. Quel est le maximum de f sur $[0; 4]$? $2,5$
Quel est le minimum de f sur $[-3; 3]$? $-0,5$

6. Construire le tableau de signes de f .

x	-4	-3,6	0	2	4	+5
signes		-	+	-	+	-
$f(x)$						

7. Résoudre, graphiquement :

- $f(x) = 2$ $S = \{-2, -2, -1, 3\}$
- $f(x) < 1$ $S = [-4, -3, 2, 5] \cup]0, 7, 5]$
- $f(x) \geq 0,5$ $S = [-3, 4, -0, 4] \cup]3, 4]$

8. On note g la fonction dont D est la représentation graphique.

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) - g(x) > 0$

$S =]-3, -2, 6[\cup]2, 4, 6[$

PARTIE B : ALGORITHMIQUE

On donne ci-dessous un algorithme (en langage naturel) permettant de calculer les frais réels, notés f , en €, à déclarer pour un cyclomoteur en fonction du nombre d de kilomètres parcourus dans l'année.

VARIABLES

d et f sont des réels

ENTREE

Saisir la valeur de d

TRAITEMENT

Si $d < 0$ alors f prend la valeur 0

Si $0 \leq d \leq 2000$ alors f prend la valeur $0,266 \times d$

Si $2000 < d \leq 5000$ alors f prend la valeur $0,063 \times d + 406$

Sinon f prend la valeur $0,144 \times d$

SORTIES

afficher f

1. Que va afficher cet algorithme si on saisit 800 pour valeur de d et si on saisit 2500 pour valeur de d ?

• $d = 800$ $f = 0,266 \times 800 = 212,8$
• $d = 2500$ $f = 0,063 \times 2500 + 406 = 563,5$

2. Compléter ci-contre, l'algorithme en langage naturel pour terminer le calcul sachant qu'au-delà de 5000 km les frais sont de 0,144 € par kilomètre.

EXERCICE 2

On a interrogé les 4812 habitants d'un village A. Voici le résultat de l'enquête concernant la durée hebdomadaire d'écoute de la télévision (en heures).

Durée	[0; 10[[10; 15[[15; 20[[20; 30[[30; 40[
Effectif	972	924	826	1 069	1 021
Fréquence (en %)	20,2	19,2	17,2	22,2	21,2

1. Quelle est la durée hebdomadaire moyenne de la durée d'écoute de la TV arrondie à 0,1h ?

$$\bar{m} = \frac{5 \times 972 + 12,5 \times 924 + 17,5 \times 826 + 25 \times 1069 + 35 \times 1021}{4812} \approx 19,4$$

La moyenne hebdo d'écoute TV est environ 19,4 h

2. Compléter le tableau ci-dessus, on arrondira tous les résultats arrondis à 0,1 près.
3. Quel est le pourcentage de personnes vivant dans ce village et qui regardent la TV au moins 15 heures par semaine ?

$$17,2 + 22,2 + 21,2 = 60,6$$

Il y a 60,6% de personnes du village qui regardent la TV au moins 15 heures par semaine

4. On donne en ANNEXE 2 sur la feuille intercalaire le polygone des fréquences cumulées en pourcentage (F.C.C.). Déterminer graphiquement la médiane et expliquer sa signification pour les habitants de ce village (laisser les traits de construction apparents).

La médiane correspond à une f.c.c. de 50%. On lit alors que la médiane est 18h.

5. Déterminer à l'aide du graphique le 3ème quartile : 28h

6. Dans un village voisin B la même enquête a donné une durée moyenne hebdomadaire de 17 heures. Sachant que pour les 2 villages réunis la moyenne hebdomadaire d'écoute de la télévision est de 18,6 h, calculer le nombre d'habitants du village B.

On note x le nombre d'hab du village B. On a :

$$18,6 = \frac{\bar{m} \times 4812 + 17 \times x}{4812 + x}$$

$$\Rightarrow 18,6 \times (4812 + x) = 93325 + 17x$$

$$\Rightarrow 89503,2 + 18,6x = 93325 + 17x$$

$$\Rightarrow 1,6x = 3821,8$$

$$\Rightarrow x \approx 2388$$

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Comment s'appelle ce type de fonction ? Comment nomme-t-on la courbe \mathcal{C}_f ?

Cette fonction est une fonction polynôme du second degré.
Sa courbe représentative est une parabole

2. Montrer que $f(x) = 2(x-1)^2 - 8$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \quad 2(x-1)^2 - 8 = 2(x^2 - 2x + 1) - 8$$

$$= 2x^2 - 4x + 2 - 8$$

$$= 2x^2 - 4x - 6 = f(x)$$

3. Factoriser l'expression de $f(x)$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2(x-1)^2 - 8 = 2((x-1)^2 - 4)$$

$$= 2((x-1)^2 - 2^2)$$

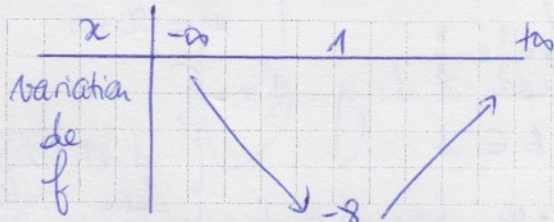
$$= 2((x-1-2)(x-1+2))$$

$$= 2(x-3)(x+1)$$

4. Si vous deviez déterminer les éléments suivants, laquelle des trois formes utiliseriez vous? Cocher la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

	forme $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$	forme $f(x) = 2(x-1)^2 - 8$	forme factorisée
coordonnées du sommet		X	
intersection avec l'axe des abscisses			X
intersection avec l'axe des ordonnées	X		

5. Dresser et justifier le tableau de variation de f .



La forme canonique $2(x-1)^2 - 8$ nous donne la coord. du sommet $S(x=1; y=-8)$.
De plus $a=2 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut.

6. Dresser le tableau des signes de $(2x-6)(x+1)$. Justifier.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$2x-6$	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+
$(2x-6)(x+1)$	+	-	-	+

$m=2; p=-6; -\frac{p}{m} = -\frac{-6}{2} = 3$
 $m=1; p=1; -\frac{p}{m} = -1$

7. En déduire l'ensemble des solutions de $f(x) > 0$

$f(x) = 2(x-3)(x+1) = (2x-6)(x+1)$. On lit donc $f(x) > 0$
 $x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$

8. Résoudre $f(x) = -6$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -6 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = -6$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0$
 $\Leftrightarrow 2x(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

$S = \{0, 2\}$

EXERCICE 4

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

- Placer sur l'ANNEXE 3 de la feuille intercalaire les points : $A(-2; 1)$; $B(5; 0)$; $C(-1; -2)$ et $D(3; 6)$.
- (a) Déterminer la nature du triangle ABC . Le justifier.

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (5 - (-2))^2 + (0 - 1)^2 = 50$
 $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (-1 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2 = 10$
 $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (-1 - 5)^2 + (-2 - 0)^2 = 40$

le côté le plus grand est $[AB]$.
On observe $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C .

- (b) Montrer que les vecteurs \vec{AC} et \vec{DB} sont colinéaires.

$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} ; \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; de même $\vec{DB} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

On observe $\vec{DB} = 2\vec{AC}$; les vecteurs sont colinéaires. (*)

- (c) Quel est la nature du quadrilatère $ACDB$. Justifier.

\vec{AC} et \vec{DB} sont colinéaires mais non égaux; donc $(AC) \parallel (DB)$ et $AC \neq DB$.
Le quadrilatère $ACDB$ est donc un trapèze, qui est de plus rectangle (angle droit en C)

(*) on pouvait également utiliser le déterminant:
 $\det(\vec{AC}, \vec{DB}) = 1 \times (-6) - 2 \times (-3) = -6 + 6 = 0$
d'où la colinéarité.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points K et L , milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$. Placer ces points sur le graphique.

$$K\left(\frac{x_A+x_C}{2}; \frac{y_A+y_D}{2}\right); K(-1,5; -0,5) \quad | \quad L\left(\frac{x_B+x_D}{2}; \frac{y_B+y_D}{2}\right); L(4; 3)$$

4. (a) Déterminer algébriquement une équation de la droite (AD) .
 $x_A \neq x_D$ donc la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Sa équation est de la forme $y = mx + p$.
 $m_{(AD)} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{6 - 1}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1$
 L'équation de (AD) est $y = x + 3$
 $p_{(AD)} = y_A - m_{(AD)} \times x_A = 1 - 1 \times (-2) = 3$

(b) Montrer que la droite (BC) admet pour équation : $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.
 Vérifions que les points B et C appartiennent à d : $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.
 $\frac{1}{3}x_B - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0 = y_B$ donc $B \in d$
 $\frac{1}{3}x_C - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times (-1) - \frac{5}{3} = -\frac{6}{3} = -2 = y_C$ donc $C \in d$
 donc d et (BC) est donc confondues.

5. (a) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$ On détaillera les calculs.
 On peut aussi expliquer cela par l'équation réduite comme à 4(a).

les équations des 2 droites apparaissant dans le système sont des équations de droites séparées. le système admet donc une unique solution $(x; y)$ qui correspond au pt d'intersection des droites. Notons $M(x; y)$ ce point.
 Par identification : $x + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = -7}$

On remplace dans la 1^{ère} eq : $y = -7 + 3 = -4$. Ainsi le système admet comme solution $(-7; -4)$

(b) Interpréter graphiquement le résultat de la question 5a). Faire les tracés correspondant sur le graphique.
 cf plus haut. $M(-7; -4)$ est le point d'intersection de (AD) et (BC)

6. Placer le point M de coordonnées $(-7; -4)$. Montrer que les points K, L et M sont alignés.

$\vec{KL} \begin{pmatrix} 5,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ $\vec{LM} \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix}$
 On observe $\vec{LM} = -2\vec{KL}$, les vecteurs \vec{LM} et \vec{KL} sont donc colinéaires et les points K, L et M alignés.
 (Il est aussi possible d'utiliser le det. au numérateur que les droites (KL) et (LM) ont le même coeff. dir.)

EXERCICE 5 L'exercice corrigé est préparé sur la fiche par 10 Ex 2

Grande manifestation aux îles Alligators (Nouvelle Papouasie du sud-est) contre le projet de loi sur la suppression du secret bancaire. Dans cette manifestation on trouve, en autres, des directeurs de banque qu'on appellera plus simplement dans la suite Directeurs, et des étrangers possesseurs de compte aux îles Alligators qu'on appellera plus simplement Etrangers.

1. Un institut de statistique, le CRS (Centre de Recherche Statistique) interroge un échantillon représentatif de 200 manifestants. Ses résultats sont les suivants :

- directeurs de banque : 60 personnes
- étrangers possesseurs de compte(s) aux îles Alligators : 35 %

(a) Donner l'intervalle de confiance à 95 %, noté I_D , pour les manifestants Directeurs. Vous arrondirez à 0,01 vos résultats.

(b) Donner l'intervalle de confiance à 95 %, noté I_E , pour les Etrangers. Vous arrondirez à 0,01 vos résultats.

~~pas au programme~~