CLASSE : 2GT....

SECONDES
DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES N°1
MARDI 29 JANVIER 2013

SUJET B

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

NOM : ....

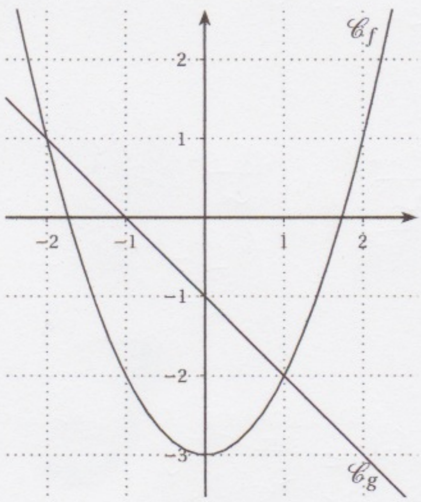
PRÉNOM : ....

Corrigé

Note :

EXERCICE 1 (8 POINTS)

La parabole ci-dessous représente une fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$. La droite représente une fonction g définie également sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$



Par lecture graphique, compléter :

- $f(1) =$ -2
- l'image de 2 par f est 1
- les antécédents de -2 par f sont -1 et 1
- l'ensemble des solutions de $f(x) = 1$ est $S = \{-2 ; 2\}$
- l'ensemble des solutions de $f(x) \leq 1$ est $S = [-2 ; 2]$
- l'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $S =]-2 ; 1[$
- l'équation de la droite représentant g est $y = -x - 1$

On donne $f(x) = x^2 - 3$

1. Déterminer par le calcul l'image de $\sqrt{3}$ par f :

   $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0$

   L'image de $\sqrt{3}$ par f est 0

2. Déterminer par le calcul les antécédents de 6 par f : HORS PGME POUR CE DEVOIR

   $f(x) = 6 \iff x^2 - 3 = 6 \iff x^2 - 9 = 0 \iff (x-3)(x+3) = 0$
   $\iff x = 3$ ou $x = -3$

   les antécédents de 6 par f sont 3 et -3

3. Dresser le tableau des variations de f

x	-2	0	2
$f(x)$	1 ↘	-3	↗ 1

EXERCICE 2 (12 POINTS)

Dans la galaxie MAT 6.1, les habitants, appelés les BYZARS considèrent que c'est une chance de payer beaucoup d'impôts (pour eux, c'est un signe de richesse, comme posséder un yacht sur Terre) et ils n'hésitent pas à quitter leur planète pour émigrer sur une autre où les impôts sont plus élevés. La monnaie de toute la planète est l'Etrange (noté €).

Sur la planète F, le montant des impôts à payer pour x € de revenu annuel est donné par la fonction f définie par :

$$f(x) = 0,19x$$

Sur la planète G, le montant des impôts à payer pour x € de revenu annuel est donné par la fonction g définie par :

on peut calculer : $g(60) = 0,1\times 60 - 2 = 6-2 = 4$

$g(90) = 0,3\times 90 - 14 = 27 - 14 = 13$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 20 \\ 0,1x - 2 & si \quad 20 \le x \le 60 \\ 0,3x - 14 & si \quad x > 60 \end{cases}$$

Pour f, on calcule 2 points appartenant à C_f

x	0	50
$f(x)$	0	9,5

1. Dans le graphique en Annexe 1, construire les courbes représentatives des deux fonctions f et g précédentes.
2. Sur ce même graphique, on a construit les droites $\mathscr{D}_h$ et $\mathscr{D}_k$ permettant de déterminer les impôts à payer sur les planètes H et K. Donner les équations de chacune de ces droites.

$\mathscr{D}_k$: $y = 9$ — Pour $\mathscr{D}_h$, on peut choisir deux points sur la courbe $A(0;5)$ $B(50;8)$

$m_h = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-5}{50-0} = \frac{3}{50} = 0,06$; $p = y_A - m \times x_A = 5$

$\mathscr{D}_h$: $y = 0,06x + 5$

3. Calculer les impôts que devrait payer sur chacune des 4 planètes un BYZAR qui a un revenu de 20€

- Planète F : $0,19 \times 20 = 3,8$ €
- Planète G : $0,1\times 20 - 2 = 0$ €
- Planète H : 9€
- Planète K : $0,06\times 20 + 5 = 1,2 + 5 = 6,2$ €

4. Grogégé a un revenu de 80€. Déterminer graphiquement sur quelle planète son impôt sera le plus élevé puis calculer le montant de cet impôt.

C'est sur la planète $f(80) = \quad \times 80 = 15,2$

5. Déterminer par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation $y = 0,3x - 14$ et $y = 0,19x$ (*valeurs approchées à 0,01 près*) puis interpréter ce que cela signifie pour les BYZARS.

Les droites sont sécantes car elles n'ont pas le même coef. directeur. Notons $M(x;y)$ le point d'intersection. Ses coord. vérifient le système

$\begin{cases} y = 0,3x - 14 \\ y = 0,19x \end{cases}$ Par identification : $0,3x - 14 = 0,19x \Leftrightarrow 0,11x = 14$
$\Leftrightarrow x = \frac{14}{0,11}$
$\Leftrightarrow x \simeq 127,27$

On remplace $x = \frac{14}{0,11}$ dans $y = 0,19x$; d'où : $y = \frac{14}{0,11} \times 0,19 \simeq 24,18$

$M(127,27 ; 24,18)$

6. Mosko, le ministre de la 5ème planète T cherche de nouvelles formules d'imposition.
   (a) Déterminer, par le calcul, l'équation de la droite passant par $A(6 ; 4)$ et $B(18 ; 10)$?

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-4}{18-6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$p = y_A - m x_A = 4 - \frac{1}{2} \times 6 = 4 - 3 = 1$

(AB) : $y = \frac{1}{2}x + 1$

(b) Déterminer, par le calcul, l'équation de la droite dont le coefficient directeur est 0,19 qui passe par le point C de coordonnées (20 ; 5)

$y = 0{,}19x + p$ et $p = y_C - m \times x_C$
$= 5 - 0{,}19 \times 20$
$= 5 - 3{,}8$
$= 1{,}2$

$y = 0{,}19x + 1{,}2$

(c) Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions m et j définies par :

$$m(x) = -4 + 9x \quad \text{et} \quad j(x) = -3{,}3x + 4{,}62$$

x	$-\infty$		$\frac{4}{9}$		$+\infty$
$m(x)$		$-$	0	$+$	

$-\frac{p}{m} = -\frac{-4}{9} = \frac{4}{9}$

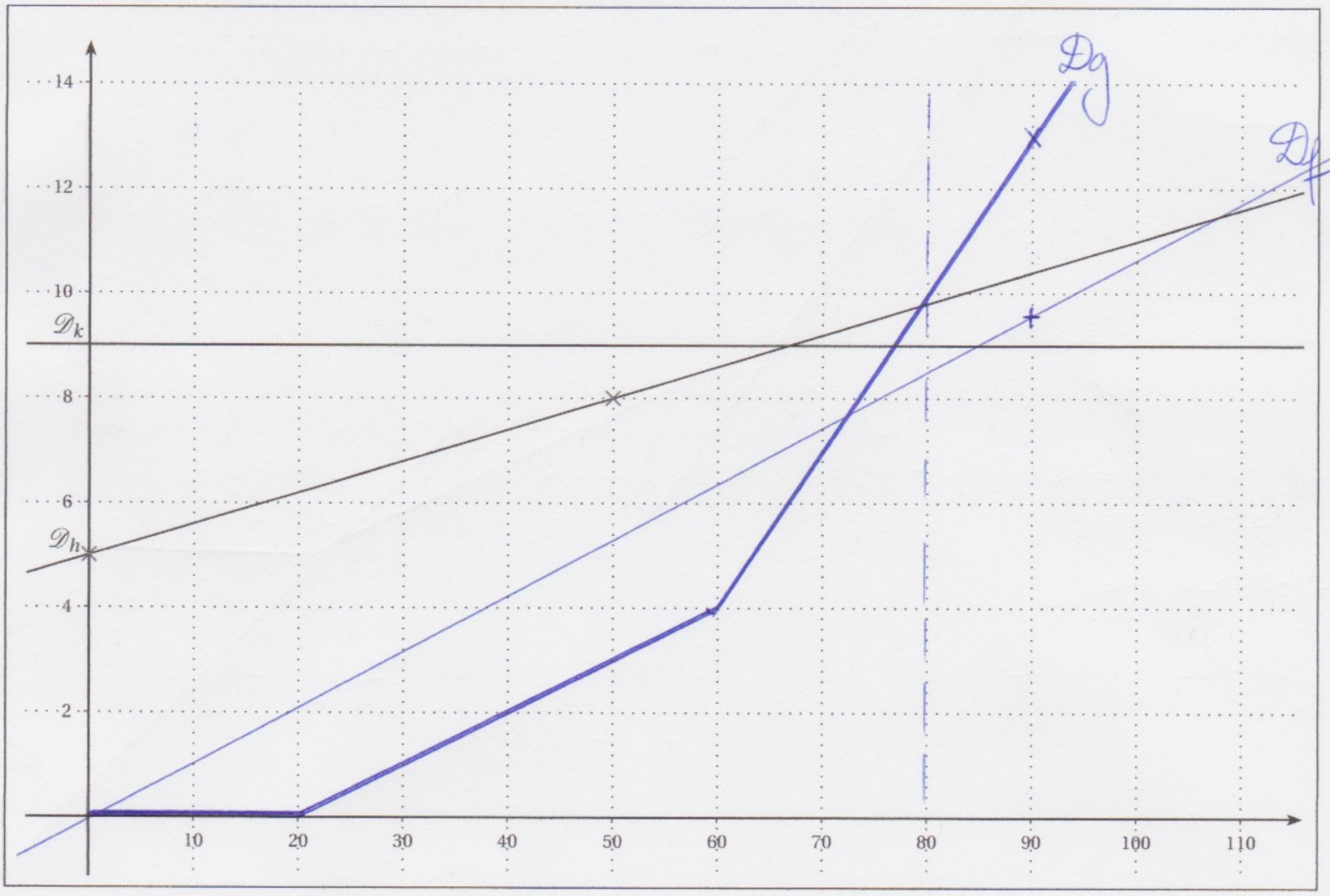
$-\frac{p}{m} = -\frac{4{,}62}{-3{,}3} = 1{,}4$

x	$-\infty$		$1{,}4$		$+\infty$
$j(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$ $+\infty$
signes $m(x)$	cf au dessus -

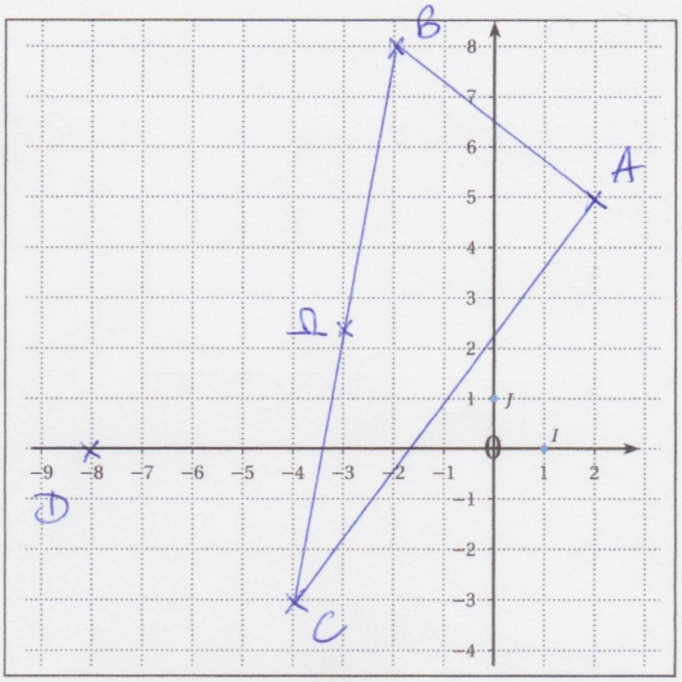
x	$-\infty$ $+\infty$
signes $j(x)$	

ANNEXE 1 - FIGURE DE L'EXERCICE 2



EXERCICE 3 (8 POINTS) Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormal. On donne les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(-2\ ;\ 8)$ et $C(-4\ ;\ -3)$.

1. Placer les points A,B et C dans le repère ci-contre.



2. Calculer AC.

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$
$= (-4-2)^2 + (-3-5)^2$
$= 36 + \ldots$

$\boxed{AC = 10}$

3. Déterminer la nature du triangle ABC (on justifiera à l'aide de calculs)

$AB^2 = (-2-2)^2 + (8-5)^2 = 16+9 = 25$

$BC^2 = (-4-(-2))^2 + (-3-8)^2 = 4+121 = 125$

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$; d'après la récip. du thm. de Pythagore, le triangle est rectangle en A

4. Quel est le centre Ω du cercle $\mathscr{C}$, cercle circonscrit au triangle ABC ? On justifiera la réponse.

ABC triangle rectangle, donc Ω centre du cercle circonscrit est milieu de l'hypoténuse, ici [BC] $\Omega\left(\frac{x_B+x_C}{2} ; \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ $\Omega\left(\frac{-2+(-4)}{2} ; \frac{8+(-3)}{2}\right)$ $\Omega(-3 ; 5/2)$

5. Calculer les coordonnées de Ω. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

Le rayon du cercle est : $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{125}}{2}$

6. Placer Ω, puis tracer $\mathscr{C}$.

7. Calculer les coordonnées de D, symétrique de A par rapport à $\Omega\left(-3\ ;\ \frac{5}{2}\right)$. Placer D sur la figure.

D symétrique de A par rapport à Ω ; donc Ω milieu de [AD] ;

d'où $\begin{cases} 2x_\Omega = x_A + x_D \\ 2y_\Omega = y_A + y_D \end{cases} \iff \begin{cases} -6 = 2 + x_D \\ 5 = 5 + y_D \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -8 \\ y_D = 0 \end{cases}$

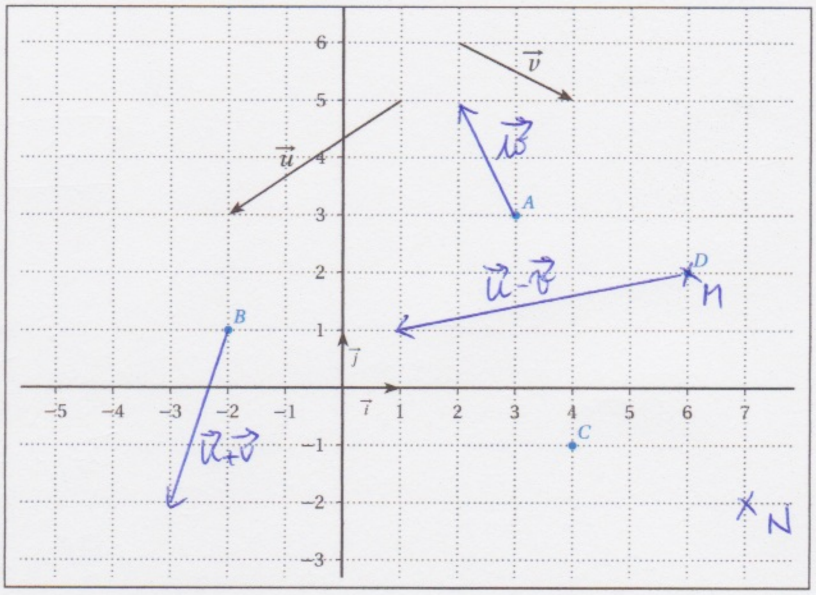
8. Déterminer la nature du quadrilatère $ABDC$. On justifiera la réponse.

Ω milieu de [AD]
Ω milieu de [BC]
les diagonales ont même milieu, c'est donc un parallélogramme.

De plus, il possède un angle droit, c'est donc un <u>rectangle</u>

EXERCICE 4 (7 POINTS) NOM : .... PRÉNOM : ....

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan



1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

2. Représenter le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ d'origine A.

3. Construire à partir de B le représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

4. Construire à partir de D le représentant du vecteur $\vec{u}-\vec{w}$.

5. (a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$. $= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

   (b) Que constate-t-on ? Le démontrer.

On constate que M et D sont confondus

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$, donc M et D sont confondus

6. (a) Placer le point N tel que $ACND$ soit un parallélogramme.

   (b) Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point N.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}x_N-6\\y_N-2\end{pmatrix}$

ACND parallélogramme $\iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DN}$

$\iff \begin{cases}1 = x_N - 6\\-4 = y_N - 2\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x_N = 7\\y_N = -2\end{cases}$

$\boxed{N(7;-}$

EXERCICE 5 (5 POINTS)

Soient $A(-2\ ;\ 4)$, $B(-1\ ;\ 1)$, $C(5\ ;\ 4)$ et $D(2\ ;\ -8)$ quatre points du plan.

1. Placer ces quatre points dans le repère en Annexe 2.
   Vous complèterez la figure au fur et à mesure de l'énoncé.

2. Vérifier que $S\left(\frac{3}{2}\ ;\ 4\right)$ est le milieu du segment $[AC]$.

Le milieu de [AC] a comme coord : $\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$

$\left(\frac{-2+5}{2}\ ;\ \frac{4+4}{2}\right)$

$\left(\frac{3}{2}\ ;\ 4\right)$

S est donc le milieu de [AC]

3. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-1)\\4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

(b) Déterminer les coordonnées du point T tel que : $\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix} x_T-(-1) \\ y_T-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T+1 \\ y_T-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x_T+1 = \frac{1}{3}\times 6 \\ y_T-1 = \frac{1}{3}\times 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_T+1 = 2 \\ y_T-1 = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_T = 1 \\ y_T = 2 \end{cases}$ $\boxed{T(1;2)}$

4. On admet que $T(1\ ;\ 2)$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Que pouvez-vous en déduire pour les droites (ST) et (CD) ?

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 1-3/2 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2-5 \\ -8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -1/2 & -3 \\ -2 & -12 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times(-12) - (-2)\times(-3) = 6-6=0$

les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont co[linéaires]
les droites (ST) et (CD) sont donc parallèles

5. Soit M le milieu du segment $[AD]$.
Montrer que les points S, T et M sont alignés.

les coord. de $\overrightarrow{TM}$ seront plus "simples".

$M\left(\frac{x_A+x_D}{2} ; \frac{y_A+y_D}{2}\right) = \left(\frac{-2+2}{2} ; \frac{4+(-8)}{2}\right) = (0;-2)$

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{TM}) = \begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times(-2) - (-2)\times(-1) =$

Les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{TM}$ sont colinéaires, les points sont donc alignés

Rmq : on pouvait aussi voir $2\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TM} \iff \overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{TM}$ colin
les pts sont alignés

ANNEXE 2 - FIGURE DE L'EXERCICE 5