# – Devoir commun de 1°S 2015 –

**Ex1**

1°a) La médiane de $S_1$ est $M_1 = 2$

L'écart interquartile de $S_1$ est $Q_3 - Q_1 = 2,1 - 1,9 = 0,2$

1°b) La moyenne de $S_1$ est $\bar{x}_1 \simeq 2,36$,

(où $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$).

L'écart-type de $S_1$ est $\sqrt{V}$ avec $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$,

i.e. $\sigma x_1 \simeq 1,22$.

2°a) La médiane de $S_2$ est $M_2 = 2$

L'écart interquartile de $S_2$ est $Q_3 - Q_1 = 2,1 - 1,9 = 0,2$

(la réponse $Q_3 - Q_1 = 2,1 - 1,85 = 0,25$ est acceptée : c'est celle donnée par la calculatrice).

2°b) La moyenne de $S_2$ est $\bar{x}_2 \simeq 1,956$

L'écart-type de $S_2$ est $\sigma x_2 \simeq 0,134$

2°c) La suppression de la dernière valeur change beaucoup la moyenne et l'écart-type, mais pas la médiane ni l'écart interquartile.

Cela reflète le fait que ces deux dernières caractéristiques ne soient pas sensibles aux valeurs extrêmes de la série.

**Ex 2** 1°a) $g(x) = 4x^2 - 28x + 40$.

est un trinôme du second degré de la forme $ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$.

On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = -9$,

d'où la forme canonique : $g(x) = 4\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (-9)$.

1°b) Le coefficient dominant $a$ de $g$ est positif, donc on a une parabole en forme de "cuvette", et le tableau de variations ci-dessous :

| $x$ | | $\alpha = \frac{7}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | $\beta = -9$ | ↗ |

$g$ admet $-9$ pour minimum, et celui-ci est atteint pour $x = \frac{7}{2}$.

1°c) Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 144 = 12^2$

$\Delta > 0$, on a deux racines distinctes : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 5 \end{cases}$

Donc les solutions de l'équation $g(x) = 0$

sont : $S = \{2 ; 5\}$.

1°d) En tant que polynôme du second degré ayant deux racines distinctes, $g(x)$ admet une écriture factorisée de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$.

Donc $g(x) = 4(x-2)(x-5)$

2°a) $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40$.

2°b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x+1)(4x^2 - 28x + 40) &= 4x^3 - 28x^2 + 40x + 4x^2 - 28x + 40 \\ &= 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40 \\ &= f'(x).\end{aligned}$$

C'est bien l'égalité demandée.

2°c) On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)(4x^2 - 28x + 40)$

Or $4x^2 - 28x + 40$ est l'expression donnée à la question 1° de la fonction $g$.

D'après 1°d), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 4(x-2)(x-5)$.

D'où la forme factorisée de $f'(x)$ suivante :

$f'(x) = 4(x+1)(x-2)(x-5)$.

Celle-ci ne contient que des facteurs du premier degré au maximum.

2°d) $\mathcal{C}_f$ possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses (i.e. de pente zéro) pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$.

Or $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 4(a+1)(a-2)(a-5) = 0$.

C'est une équation-produit, d'ensemble de solutions

$$S = \{-1\,;\,2\,;\,5\}.$$

L'équation $f'(a) = 0$ ayant trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ possède trois tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

2°e) Au point d'abscisse 0, la tangente $T_0$ à $\mathcal{C}_f$ a pour équation : $T_0 \,/\, y = f'(0)(x-0) + f(0)$,

(qui est bien définie car $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$).

Or $f'(0) = 40$ et $f(0) = -39$,

d'où $T_0 \,/\, y = 40x - 39$

**Ex 3** 1°) $u_0 = 0$ ; $u_1 = 1$ ; $u_2 = 4$ ; $u_3 = 9$ ;
$u_4 = 16$ ; $(u_5 = 25)$.

2°) On conjecture que $u_n = n^2$.

3°) Supposons que $u_n = n^2$.
Pour $n = 0$, il vient $u_0 = 0^2 = 0$
Vérifions la relation de récurrence :

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \end{array}\right\} \text{ donc on a bien } u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

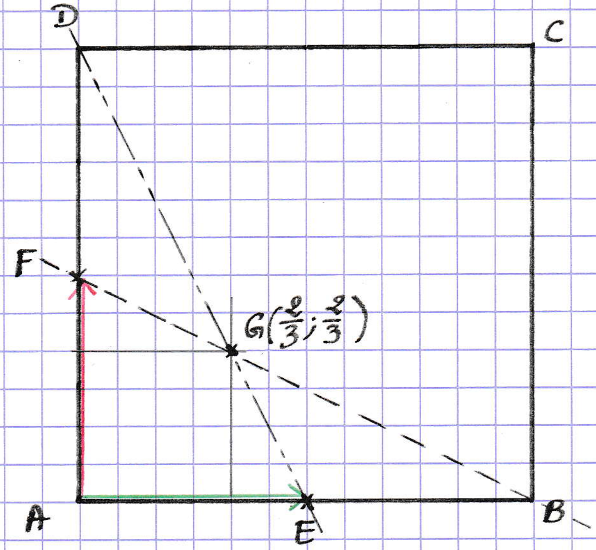
Finalement, $u_n = n^2$, notre conjecture est vérifiée.

**Ex 4** a) $(\vec{IA}, \vec{ID}) = \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$ $[2\pi]$

b) $(\vec{IB} ; \vec{ID}) = \pi$ $[2\pi]$ (mesure principale)

c) $(\vec{IB} ; \vec{CI}) = (\vec{IB} ; \vec{IA}) = \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$ $[2\pi]$.

**Ex 5** La figure n'est pas demandée :




1°) Dans le repère $(A ; \vec{AE} ; \vec{AF})$,
on a : $B(2;0)$ et $F(0;1)$,
d'où $\vec{BF}\begin{vmatrix} 0-2 = -2 & = -b \\ 1-0 = 1 & = a \end{vmatrix}$

$\vec{BF}$ est un vecteur directeur de la droite (BF), donc celle-ci admet une équation cartésienne de la forme :

$1x + 2y + c = 0$

Or $F \in (BF)$, donc $1 \times 0 + 2 \times 1 + c = 0$

$2 + c = 0$

$c = -2$

Une équation cartésienne de (BF) est donc $x + 2y - 2 = 0$.

2°) Vérifions que $G \in (BF)$

$$\frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = \frac{6}{3} - \frac{6}{3} = 0$$

donc G appartient bien à (BF).

3°) (Il y a plusieurs démarches possibles)

Dans le repère $(A ; \vec{AE} ; \vec{AF})$ on a :

$E(1;0)$ ; $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ ; $D(0;2)$, d'où :

$\vec{EG} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} \end{vmatrix}$ et $\vec{ED} \begin{vmatrix} 0 - 1 = -1 \\ 2 - 0 = 2 \end{vmatrix}$

Ainsi, $\vec{EG} = \frac{1}{3}\vec{ED}$, les vecteurs $\vec{EG}$ et $\vec{ED}$ sont colinéaires et par suite les points E, G, D sont alignés.

4°) Dans le triangle ABD, la droite (ED) passe par le sommet D et le milieu E du côté opposé : c'est une médiane.

Or d'après ce qui précède, le point G est situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet D : c'est le centre de gravité du triangle.

(On peut aussi arguer que G est le point de concours des médianes (ED) et (FB) de ABD).